



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELLA BASILICATA
Scuola di Ingegneria



Corso di
TECNICA DELLE COSTRUZIONI

RICHIAMI DI STATICA

Docente:
Prof. Ing. Angelo MASI

Collaboratori:
Ing. Vincenzo MANFREDI
Ing. Giuseppe VENTURA

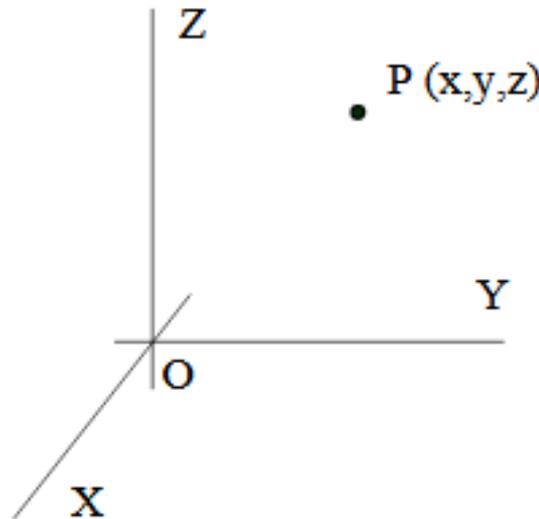
ARGOMENTI

1. GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI
2. EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA
3. CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI E DELLE SOLLECITAZIONI
 - SOLUZIONE DI TRAVI ISOSTATICHE
4. GEOMETRIA DELLE AREE
 - SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE
5. CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI
6. SISTEMI IPERSTATICI
 - SOLUZIONE DI TRAVI IPERSTATICHE

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

Se consideriamo un punto materiale **P** nello spazio, sappiamo che la sua posizione è definita, in modo univoco, da **3** grandezze scalari (le sue coordinate).



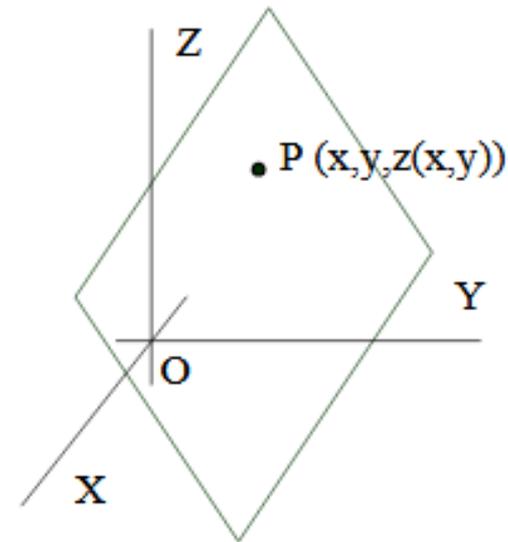
Si può affermare dunque che il punto nello spazio ha **3 gradi di libertà** in quanto, qualunque sistema di riferimento si consideri, la sua posizione è definita da tre coordinate indipendenti.

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

Se il punto materiale è **vincolato** a stare su di una superficie (ad es. un piano) i **gradi di libertà sono 2**.

In questo caso la condizione di appartenenza alla superficie può essere interpretata come una **limitazione** dei gradi di libertà del punto

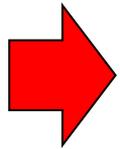
$$ax + by + cz + d = 0$$



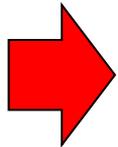
Tale **limitazione** è esprimibile analiticamente da un'equazione che lega le coordinate del punto (ad es. l'equazione del piano).

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

I **vincoli** sono quindi condizioni (spesso esprimibili con equazioni) che **limitano i gradi di libertà** dei punti.



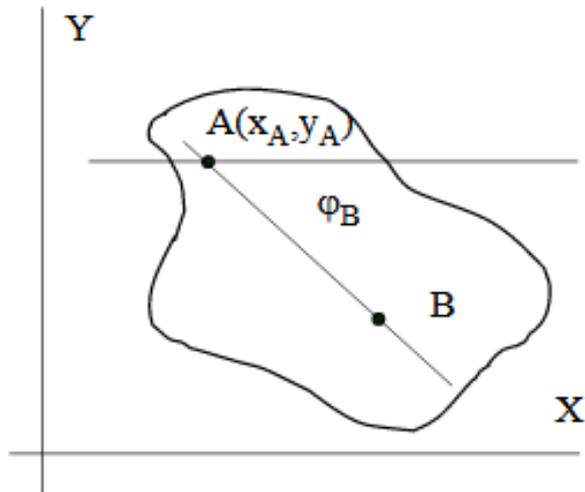
Passando da un punto materiale ad un sistema di **n** punti materiali, i gradi di libertà risultano in generale pari a **3n**.



Se consideriamo un sistema rigido si ha una notevole riduzione degli effettivi gradi di libertà. Questo è dovuto dalle **relazioni** esistenti tra le coordinate dei vari punti, la cui **distanza relativa è costante**.

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

Per individuare la posizione del corpo rigido **nel piano** basta considerare due punti arbitrari distinti **A** e **B**. Conoscendo le loro coordinate è possibile determinare le coordinate di qualsiasi altro punto del corpo

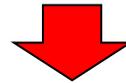


Il corpo rigido nel piano ha 3 gradi di libertà.

Fissando le coordinate (x_A, y_A) il punto B è **vincolato** a muoversi su una circonferenza attorno ad A. Quindi fissando anche la posizione angolare di B (φ_B) si definisce univocamente la posizione del corpo.

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

Per quanto appena detto consegue che : Un corpo rigido libero di muoversi nel piano presenta tre possibilità di spostamento, una **rotazione**, una **traslazione** lungo l'asse di riferimento **X** ed una **traslazione** lungo l'asse **Y**.

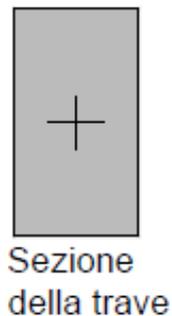


- Se il corpo non è completamente vincolato si dice **labile**.
- Se i vincoli sono necessari e sufficienti a fissare i gradi di libertà si dice che il corpo è **isostatico**.
- Se invece i vincoli sono eccessivi, il corpo si dice **iperstatico**.

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

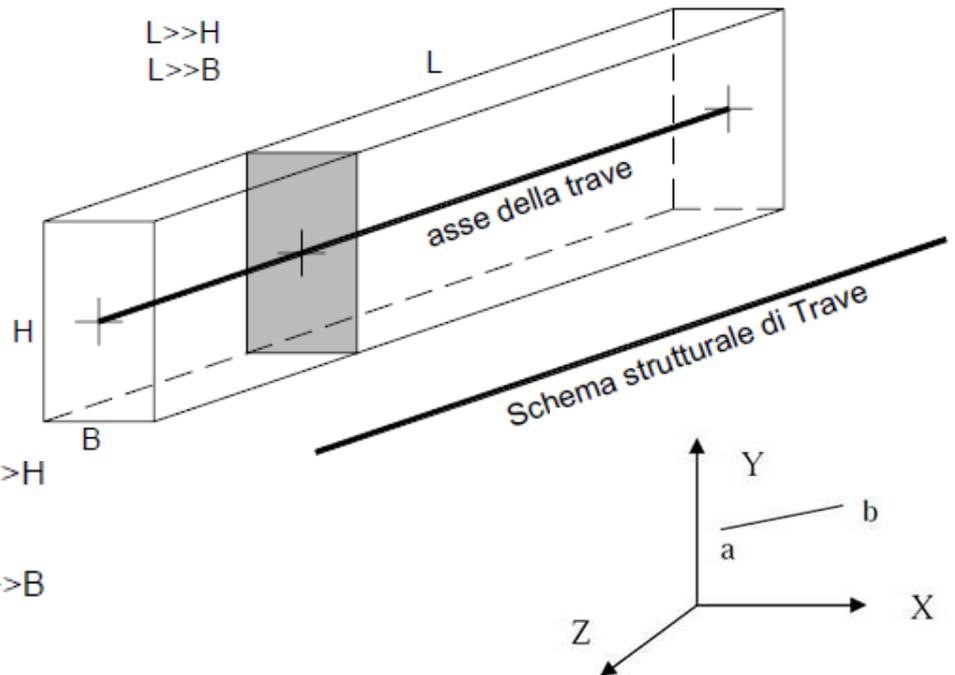
Considerando la **trave** come un particolare corpo rigido si può dunque affermare che una trave, libera di muoversi nel piano cartesiano, possiede tre possibilità di movimento (**tre gradi di libertà**) e cioè può traslare nella direzione dell'asse X (**Dx**), può traslare nella direzione dell'asse Y (**Dy**) e può ruotare nel piano XY (**Rz**).

una trave è schematizzata con un segmento coincidente con l'asse della trave reale.



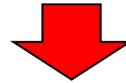
Condizioni per adottare lo schema strutturale di trave

$$\left[\begin{array}{l} L \gg H \\ L \gg B \end{array} \right.$$



GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

Al fine di mantenere in **equilibrio** un'asta (trave) o un sistema di aste su cui agiscono delle azioni esterne (forze e coppie) è necessario prevedere l'imposizione di vincoli.



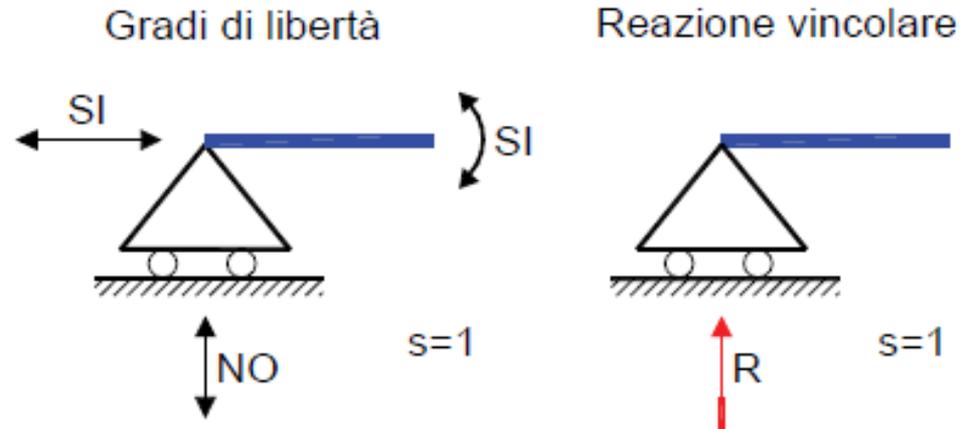
Dunque dal punto di vista **statico** (o delle forze) se un vincolo blocca uno spostamento allora può esercitare sulla trave un forza (**reazione vincolare**) in grado di opporsi a quello spostamento.

Il vincolo si definisce:

- **Semplice**, se esercita una sola reazione vincolare
- **Doppio**, se esercita due reazioni vincolari
- **Triplo**, se esercita tre reazioni vincolari

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

II CARRELLO vincolo semplice

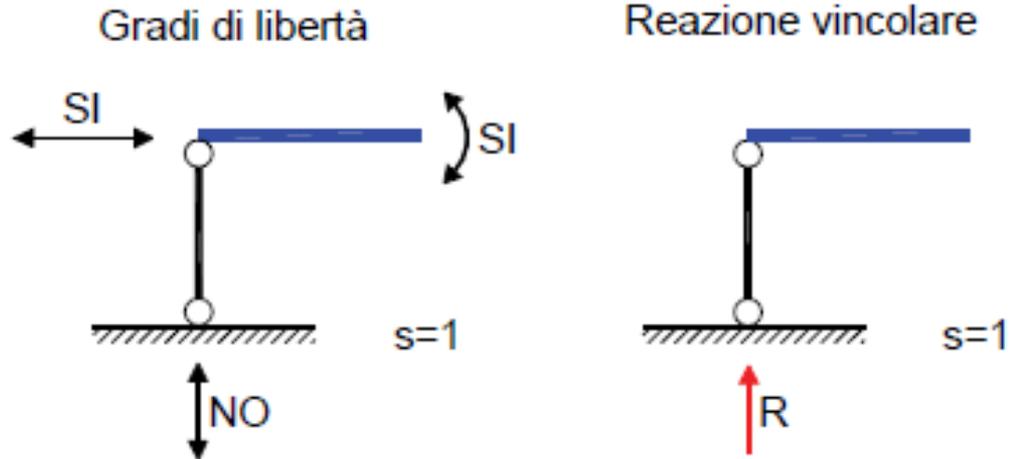


Un tratto di trave libero da un estremo e vincolato all'altro estremo con un carrello, **conserva la sua capacità di ruotare e di traslare solo lungo il piano di scorrimento del carrello ($s=1$).**

Dal punto di vista statico il carrello, **impedendo la traslazione lungo l'asse perpendicolare al piano di scorrimento**, deve essere in grado di esercitare una reazione vincolare **R** proprio **lungo tale direzione**.

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

II PENDOLO vincolo semplice

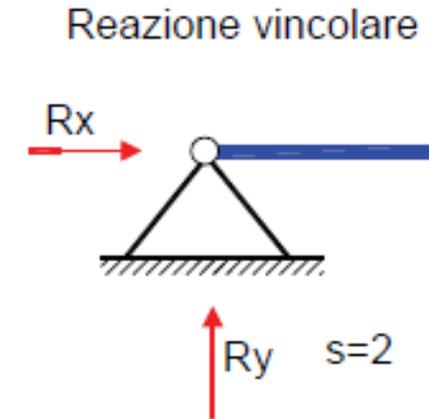
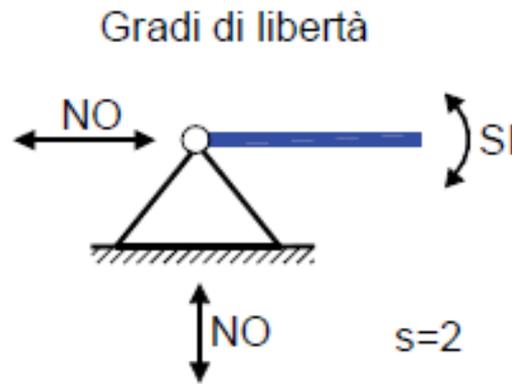


Blocca solo il grado di libertà relativo allo spostamento lungo la direzione dell'asse del pendolo ($s=1$). Resta consentita la rotazione dell'asta e la traslazione lungo la direzione perpendicolare all'asse del pendolo

Dal punto di vista delle forze un pendolo è in grado di esercitare **solo una reazione vincolare** che agisce nella direzione dell'asse del **R**.

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

LA CERNIERA vincolo doppio

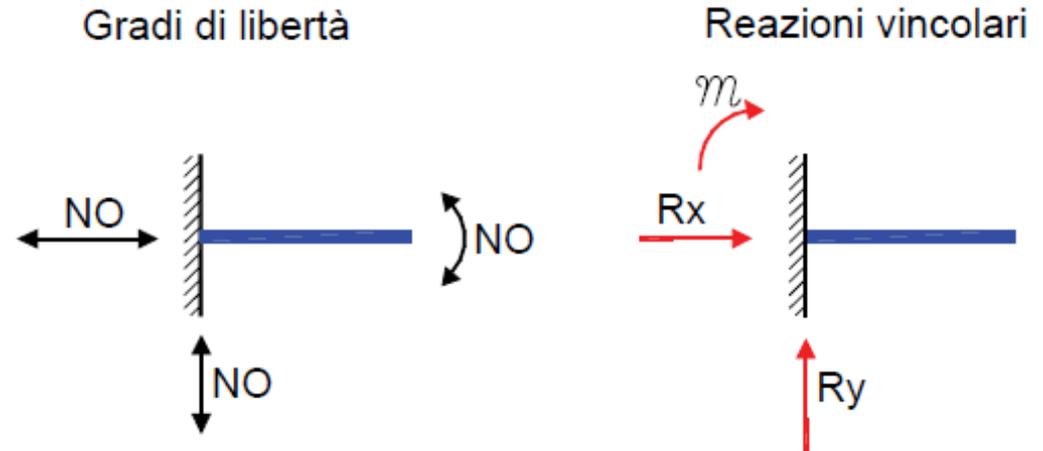


la cerniera è un vincolo doppio in quanto **blocca entrambi le traslazioni** lungo gli assi coordinati di riferimento lasciando libera la sola rotazione del tratto di trave collegata ($s=2$).

Dal punto di vista statico la cerniera è in grado di esercitare sulla trave due reazioni vincolari, una parallela all'asse Y (R_y) e una all'asse X (R_x).

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

**L'INCASTRO
vincolo triplo**



L'incastro è un vincolo che è in grado di bloccare entrambe le traslazioni ed anche la rotazione dell'estremo della trave ad esso collegato ($s=3$).

Dal punto di vista delle forze l'incastro deve esercitare le due reazioni vincolari **Rx** ed **Ry** e anche una reazione vincolare caratterizzata da una coppia **m**.

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

	Dx	Dy	Rz	Totale g.d.l. eliminati
CARRELLO	NO	SI	NO	1
CERNIERA	SI	SI	NO	2
INCASTRO	SI	SI	SI	3
PENDOLO	NO	SI	NO	1
BIPENDOLO	NO	SI	SI	2

SI: g.d.l. vincolato

NO: g.d.l. non vincolato

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

Al fine di analizzare la statica di un'asta (trave) caricata da un sistema di forze, per prima cosa bisogna stabilire se l'asta che si sta studiando è **labile**, **isostatica** oppure **iperstatica**.

- **Un'asta è labile** se il numero di gradi di libertà (g.d.l.) vincolati è minore del numero di gradi libertà dell'asta stessa.
- **Un'asta è isostatica** se il numero di g.d.l. vincolati è uguale al numero di g.d.l.
- **Un'asta è iperstatica** se il numero di g.d.l. vincolati supera il numero di g.d.l.

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

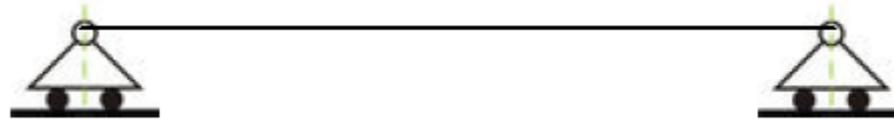
In base alle precedenti definizioni e sapendo che un'asta presenta 3 g.d.l. nel piano, si può ricavare una semplice espressione per stabilire se un'asta è **labile**, **isostatica** o **iperstatica**:

- **trave labile** $3t-s > 0$
- **trave isostatica** $3t-s = 0$
- **trave iperstatica** $3t-s < 0$

Dove **t** è il numero di tratti elementari di cui è costituita l'asta mentre **s** è il numero di g.d.l. vincolati.

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

Esempio: trave con due carrelli



- Abbiamo un solo tratto ($t=1$), quindi $3t=3$
- Il numero di g.d.l. eliminato è pari a 2 (2 carrelli), quindi $s=2$

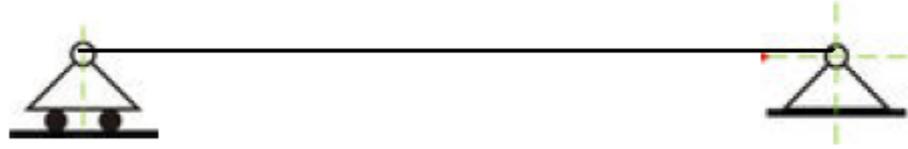


$$3t - s = 1$$

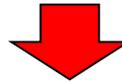
La trave è **labile**, infatti applicando una forza orizzontale è evidente che il sistema sarebbe in grado di muoversi in direzione orizzontale.

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

Esempio: trave con carrello e cerniera



- Abbiamo ancora un solo tratto, quindi $3t=3$
- Il numero di g.d.l. eliminato è pari a 3 (1 carrello e 2 cerniera) quindi $s=3$

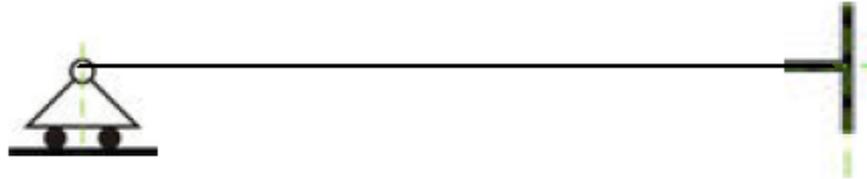


$$3t-s = 0$$

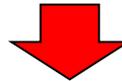
La trave è **isostatica** ovvero è in grado di rimanere in equilibrio sotto un sistema di forze esterne.

GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

Esempio: trave con carrello e incastro



- Abbiamo un solo tratto, quindi $3t=3$
- Il numero di g.d.l. eliminato è pari a 4 (1 carrello e 3 incastro) quindi $s=-1$



$$3t-s = -1$$

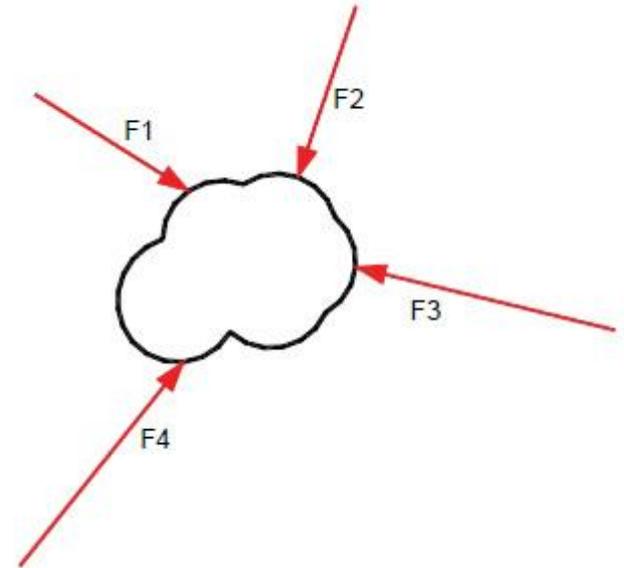
La trave è una volta **ipersatica** ovvero ha un numero di vincoli ridondante.

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

Un corpo rigido libero di muoversi nel piano soggetto ad un sistema di forze, **resta in equilibrio** (non subisce spostamenti) **se il sistema di forze che lo sollecita è un sistema equilibrato**.

Si ricorda che un sistema di forze **F_i** si dice equilibrato quando presenta risultante nulla (**$R=0$**) e momento risultante nullo (**$M=0$**) rispetto ad un qualunque punto del piano



dal punto di vista analitico

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

1) la risultante delle forze applicate dovrà essere nulla:

$$\mathbf{r} = \sum_i \mathbf{f}_i = \mathbf{0}$$

\mathbf{f}_i = forza generica (anche le reazioni vincolari sono forze)

2) la risultante dei momenti delle forze e delle coppie applicate deve essere nulla

$$\mathbf{M}_o = \sum_i \mathbf{r} \times \mathbf{f}_i + \sum_j \mathbf{c}_j = \mathbf{0}$$

\mathbf{M}_o è la sommatoria di tutte le coppie \mathbf{c}_j e di tutti i momenti generati dalle forze \mathbf{f}_i agenti con braccio \mathbf{r}_i rispetto al polo \mathbf{O}

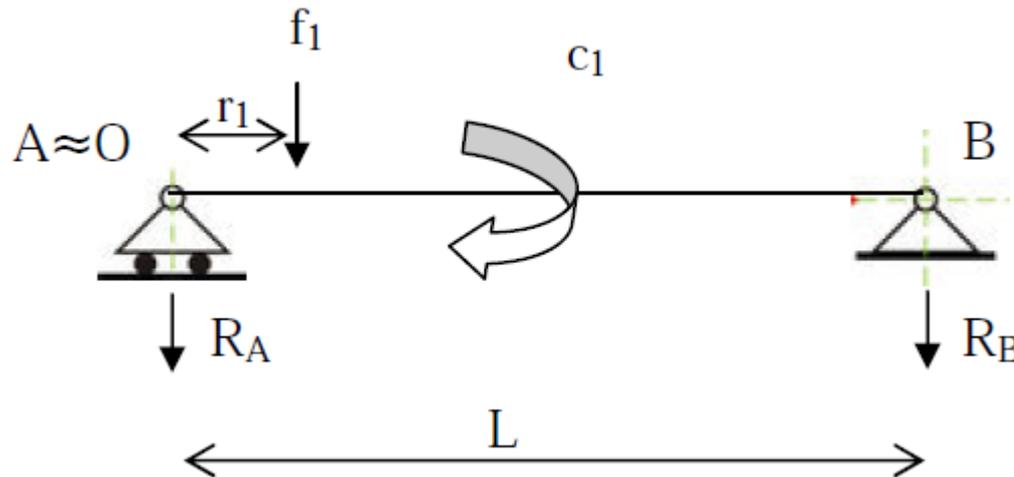
EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

La 1) e la 2) rappresentano le **equazioni cardinali della statica** ed esprimono la condizione di equilibrio di un corpo rigido soggetto ad un sistema di forze.

- La prima equazione esprime **l'equilibrio alla traslazione** lungo le due direzioni (**X,Y**) del sistema di riferimento considerato
- La seconda equazione esprime **l'equilibrio alla rotazione** intorno ad un punto arbitrario **O** del piano.

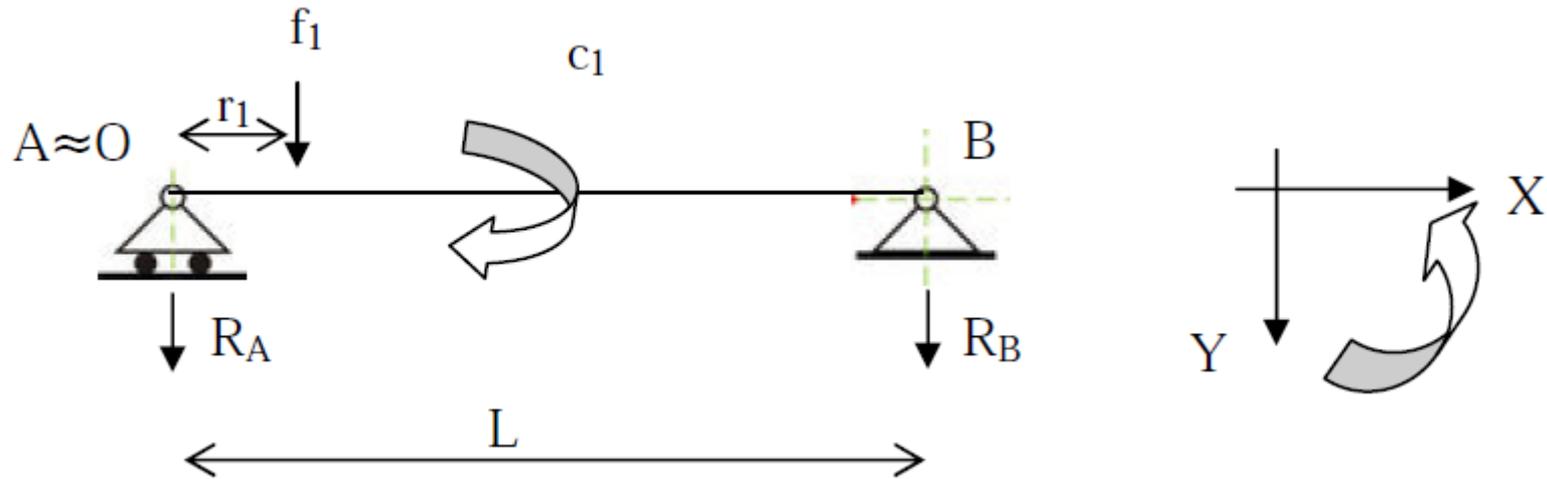
EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

Caso elementare: trave doppiamente appoggiata caricata da una forza ed una coppia.



Il polo O viene assunto coincidente con l'appoggio di sinistra A , ovvero il carrello.

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA



Le equazioni precedenti diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} = \sum_i \mathbf{f}_i = 0 \\ \mathbf{M}_o = \sum_i \mathbf{r} \times \mathbf{f}_i + \sum_j \mathbf{c}_j = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_1 + R_A + R_B = 0 \\ -f_1 \cdot r_1 - c_1 - R_B \cdot L = 0 \end{array} \right.$$

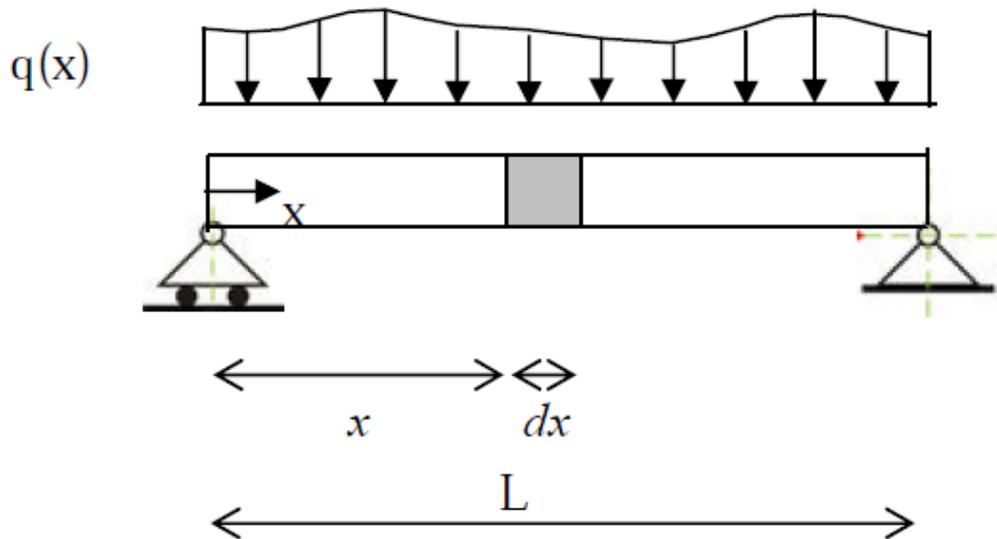
Un sistema di due equazioni nelle due incognite R_A ed R_B

CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI E DELLE SOLLECITAZIONI

REAZIONI VINCOLARI E SOLLECITAZIONI

In una trave genericamente vincolata e caricata insorgono delle sollecitazioni interne quali **taglio**, **momento flettente**, **sforzo assiale** e **torsione**.

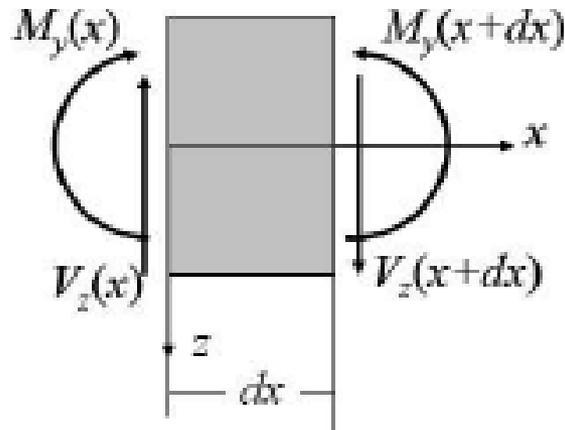
Consideriamo il seguente schema di trave, soggetta ad un carico distribuito $q(x)$, e immaginiamo di estrarre un concio elementare dx



Con un carico distribuito $q(x)$ avremo solo taglio e momento flettente

REAZIONI VINCOLARI E SOLLECITAZIONI

Il concio elementare dx sarà in equilibrio, sotto le azioni esterne, grazie alle sollecitazioni interne.



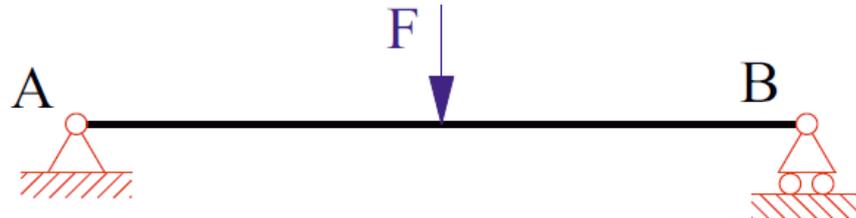
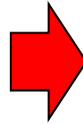
Il momento flettente si considera positivo, per convenzione, se tende le fibre inferiori.

Il taglio sul concio è positivo se induce una rotazione dello stesso in senso orario.

- sulla **faccia di sinistra** il taglio positivo è rappresentato da una forza diretta verso l'alto
- sulla **faccia di destra** il taglio positivo equivale ad una forza diretta verso il basso.

SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

PROBLEMA

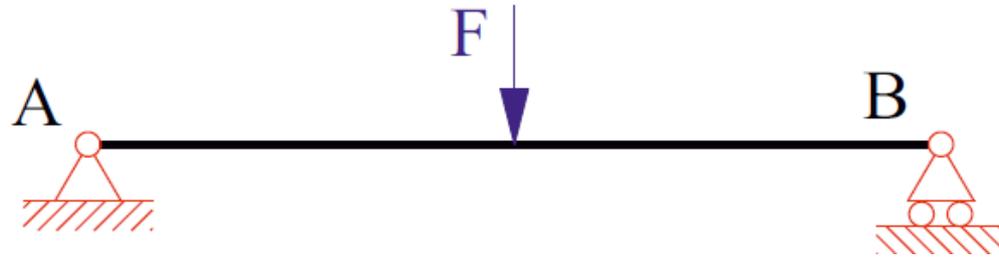


SOLUZIONE

- Riconoscere i **vincoli** e i gradi di libertà bloccati (**s**)
- Riconoscere se la struttura è **isostatica** (ovvero se è labile o iperstatica)
- Calcolo delle Reazioni Vincolari (**R**, **m**)
- Calcolo delle Sollecitazioni (**N**, **V**, **M**)

SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

Si consideri il caso in cui una trave **appoggiata – appoggiata** (in **A** e **B**) è soggetta ad una forza concentrata verticale di intensità **F** in mezzeria

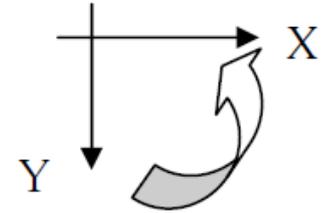
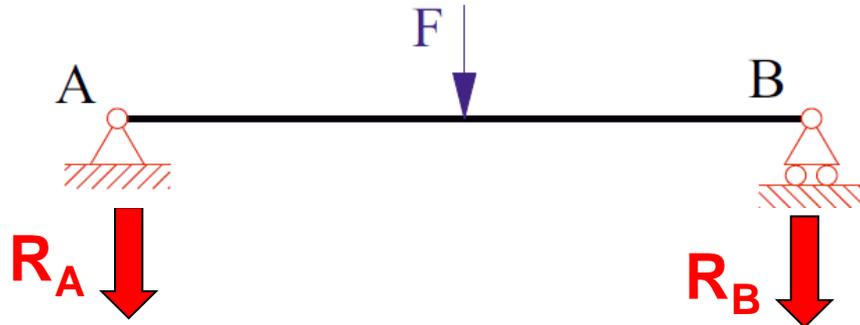


La quantità $q=3t-s$ vale $q=3-3$, i vincoli sono ben disposti e quindi il sistema è **isostatico**.

Applichiamo le equazioni cardinali della statica per determinare le reazioni vincolari

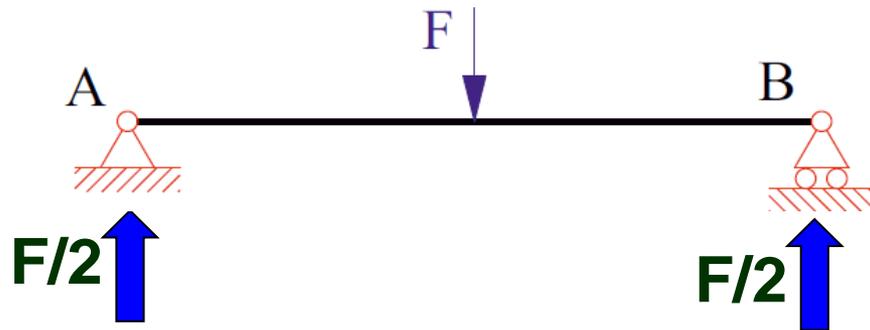
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} = \sum_i \mathbf{f}_i = 0 \\ \mathbf{M}_o = \sum_i \mathbf{r} \times \mathbf{f}_i + \sum_j \mathbf{c}_j = 0 \end{array} \right.$$

SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE



$$\left\{ \begin{array}{l} R_A + R_B + F = 0 \\ -R_B \cdot L - F \cdot L/2 = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R_A = F/2 \\ R_B = F/2 \end{array} \right.$$

(diretta verso l'alto)
(diretta verso l'alto)

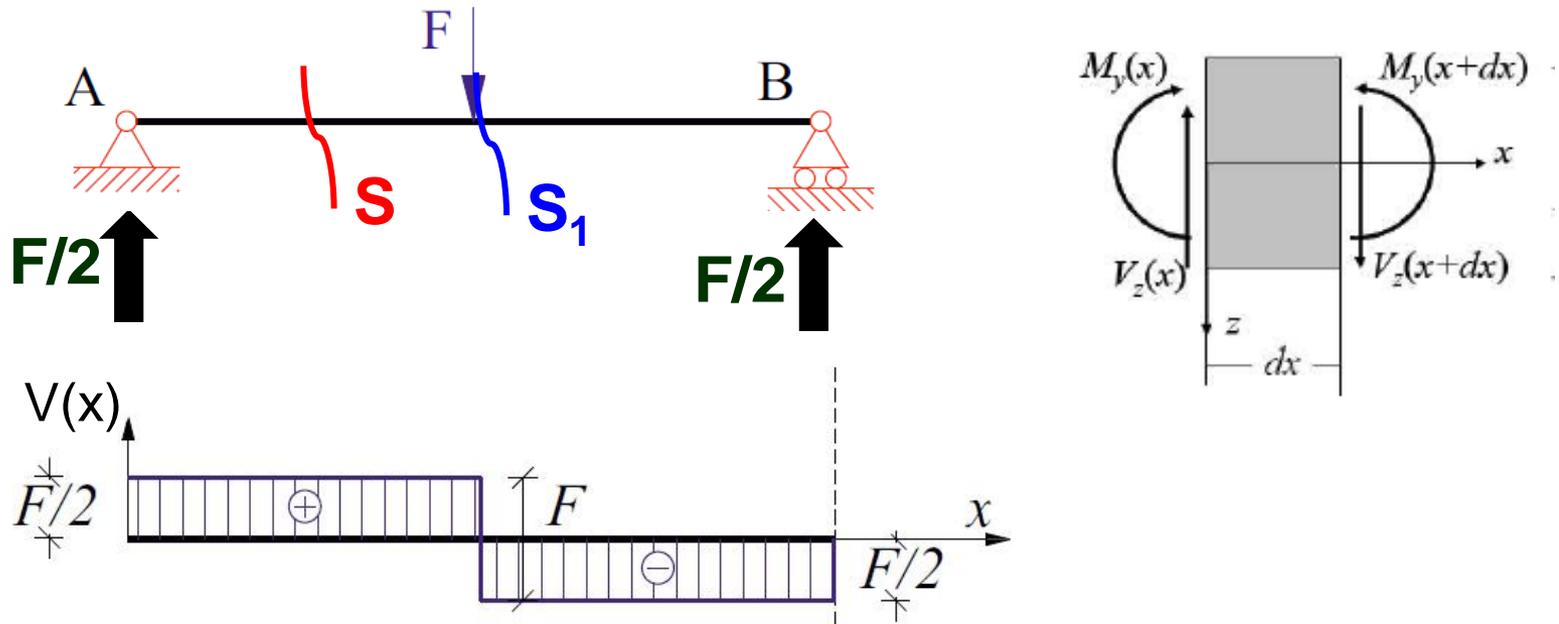


Reazioni Vincolari

SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

Diagramma del Taglio

In una sezione generica **S** la caratteristica della sollecitazione V_S si può determinare come somma di tutte le forze agenti a destra o sinistra di **S**.



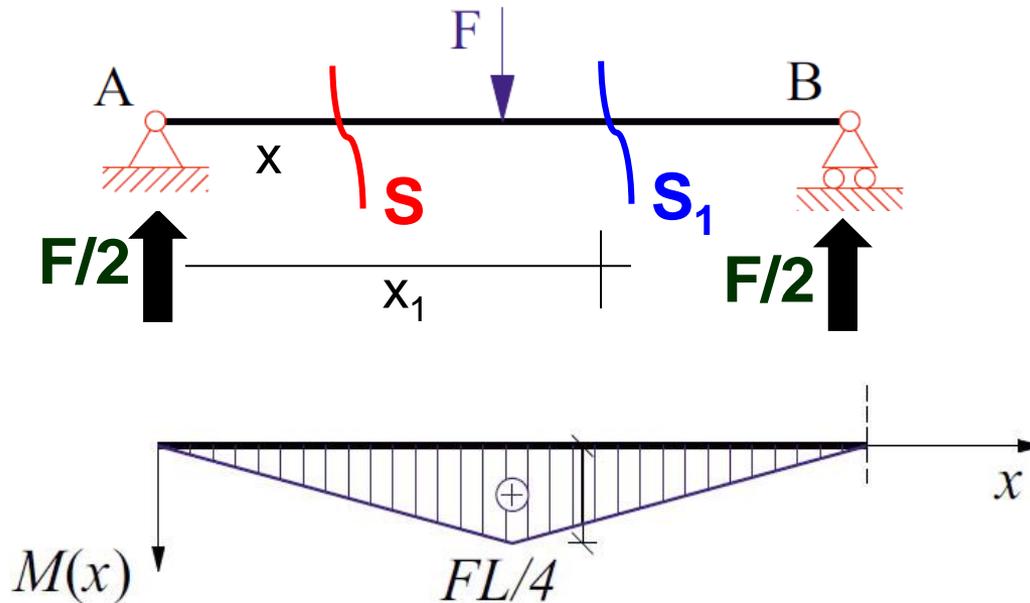
$$V(S) = F/2 \text{ (costante fino a } x=L/2)$$

$$V(S_1) = F/2 - F = -F/2 \text{ (costante fino a } x=L)$$

SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

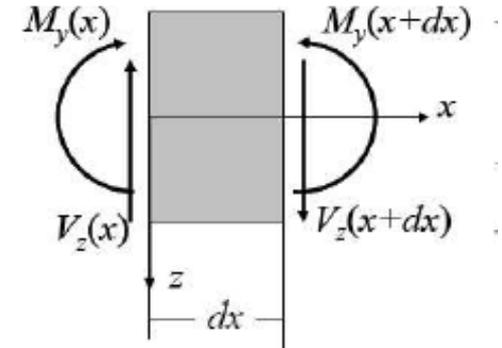
Diagramma del Momento Flettente

In una sezione generica **S** la caratteristica della sollecitazione V_S si può determinare come somma di tutte le forze agenti a destra o sinistra di **S**.



$$M(S) = F/2 \cdot X = (\text{lineare})$$

$$M(S_1) = F/2 \cdot X_1 - F \cdot (X_1 - L/2) = (\text{lineare})$$



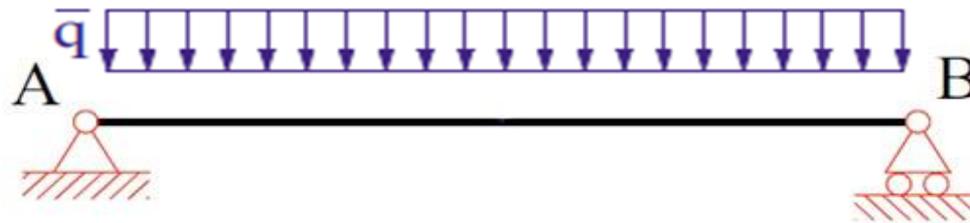
$$M(A) = 0$$

$$M(B) = 0$$

$$M(L/2) = F \cdot L/4$$

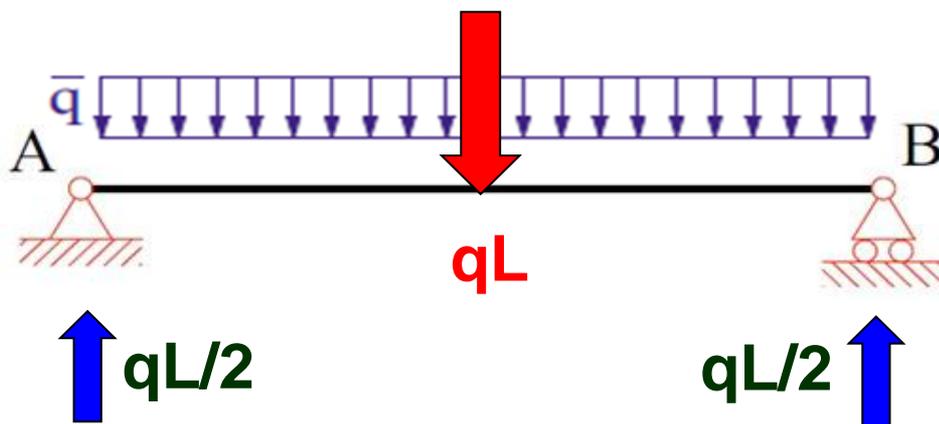
SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

Si consideri il caso in cui una trave **appoggiata** – **appoggiata** (in **A** e **B**) è soggetta ad un carico distribuito **q**



$$q=3t-s=0$$

Per ricavare le reazioni vincolari sostituiamo il carico con la risultante **F=q*L** applicata nel suo baricentro.



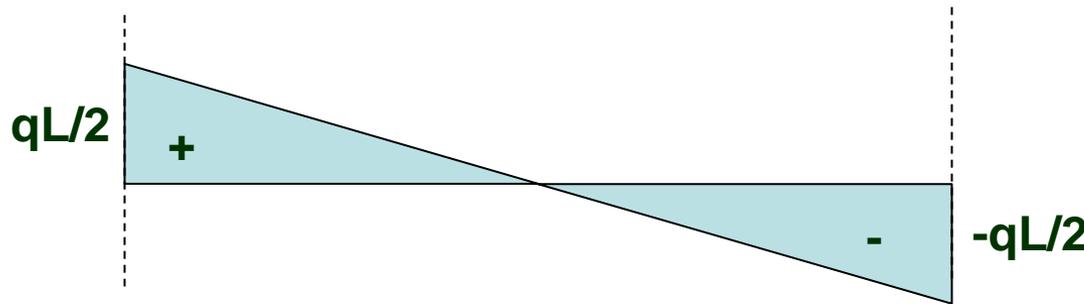
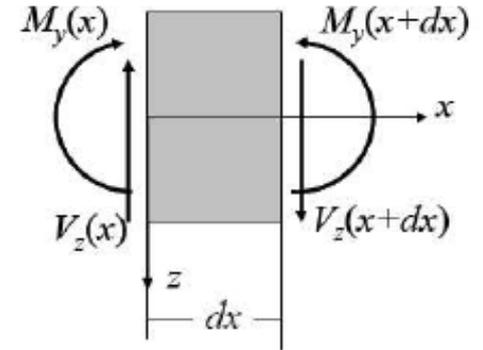
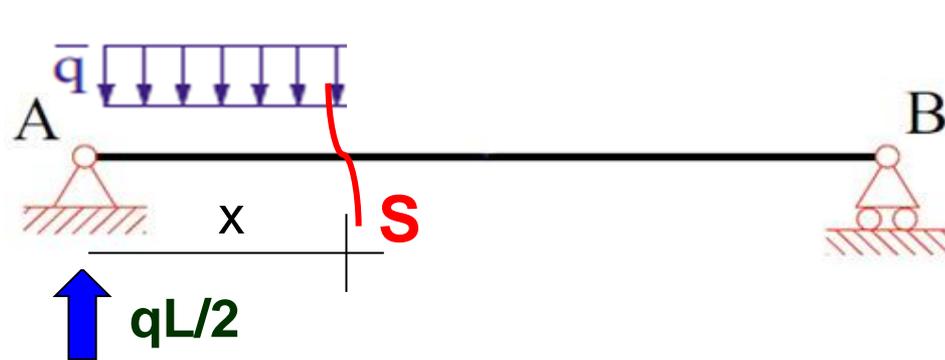
Per analogia con la trave caricata da una forza in mezzeria

$$R_A = R_B = -F/2 = -qL/2$$

SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

Diagramma del Taglio

Alla generica sezione **S** la valutiamo la caratteristica della sollecitazione V_S come somma di tutte le forze agenti a sinistra di **S**.

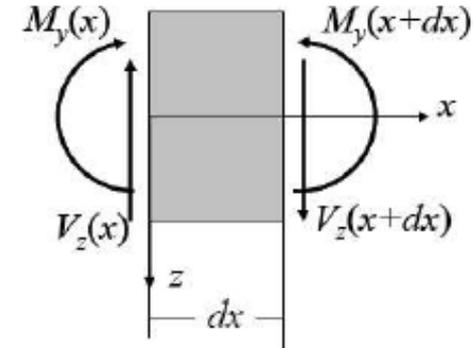
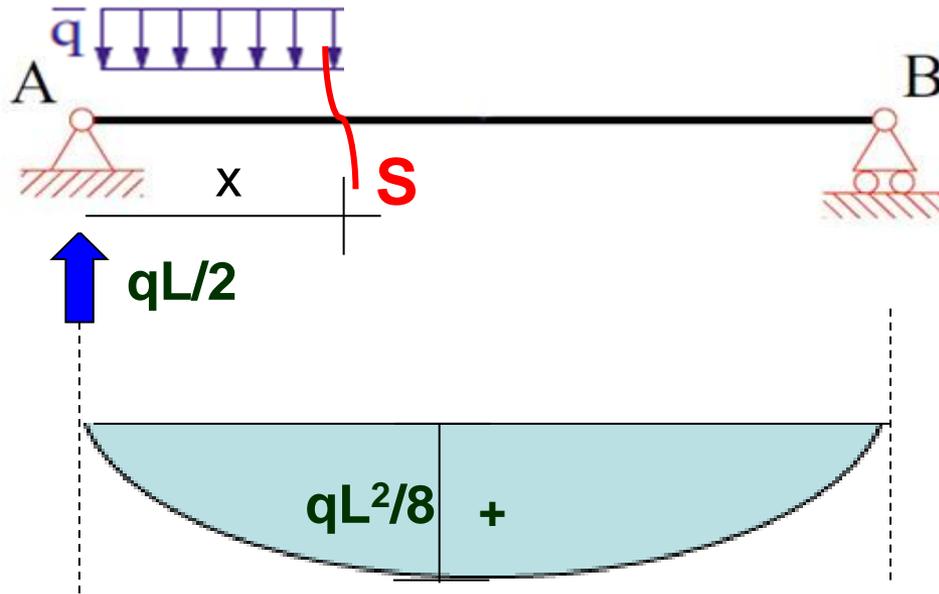


Funzione lineare tra $qL/2$ e $-qL/2$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(0) = qL/2 \\ V(x) = qL/2 - qx \\ V(L) = -qL/2 \end{array} \right.$$

SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

Diagramma del Momento Flettente



La derivata si annulla in mezzeria e dunque a $L/2$ il momento è massimo

$$dM/dx = L - 2x = 0$$


 $x = L/2$

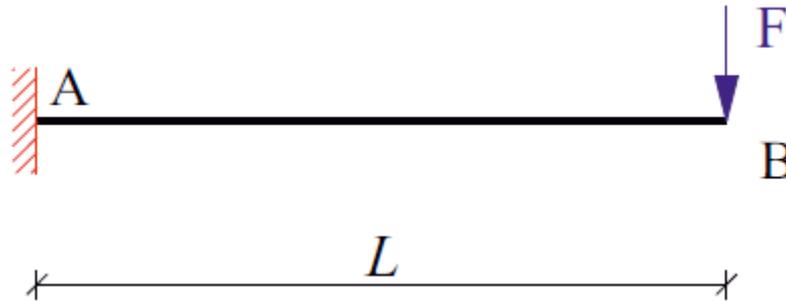
$$M(0) = M(L) = 0$$

$$M(x) = q \cdot x \cdot L/2 - q \cdot x \cdot x/2 = q/2 (L \cdot x - x^2)$$

$$M(L/2) = qL^2/8$$

SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

Si consideri il caso in cui una trave (**a mensola**) incastrata nel punto **A** è soggetta ad una forza concentrata verticale di intensità **F** nell'estremo libero **B**

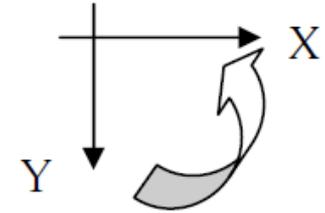
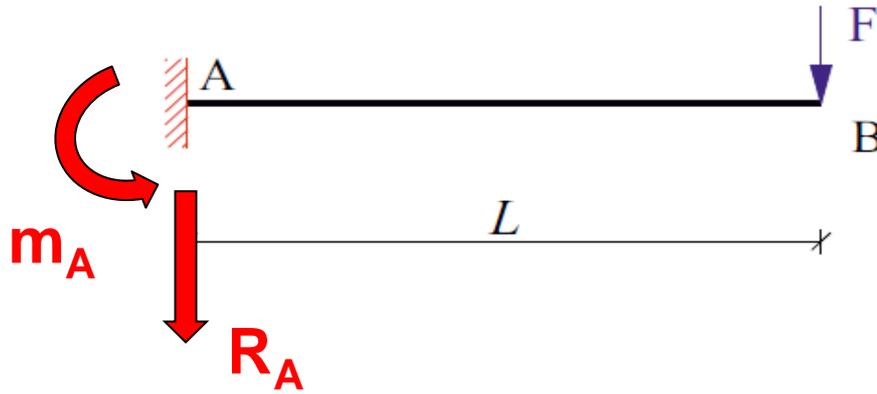


La quantità $q=3t-s$ vale $q=3-3$, i vincoli sono ben disposti e quindi il sistema è **isostatico**.

Applichiamo le equazioni cardinali della statica per determinare le reazioni vincolari

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} = \sum_i \mathbf{f}_i = 0 \\ \mathbf{M}_o = \sum_i \mathbf{r} \times \mathbf{f}_i + \sum_j \mathbf{c}_j = 0 \end{array} \right.$$

SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

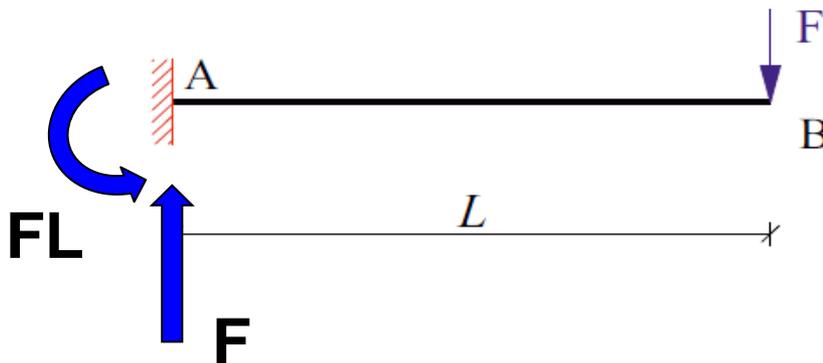


$$\left\{ \begin{array}{l} R_A + F = 0 \\ m_A - F \cdot L = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_A = -F \\ m_A = F \cdot L \end{array} \right.$$

(diretta verso l'alto)

(in senso antiorario)



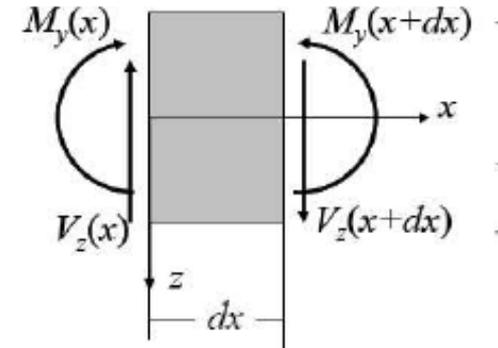
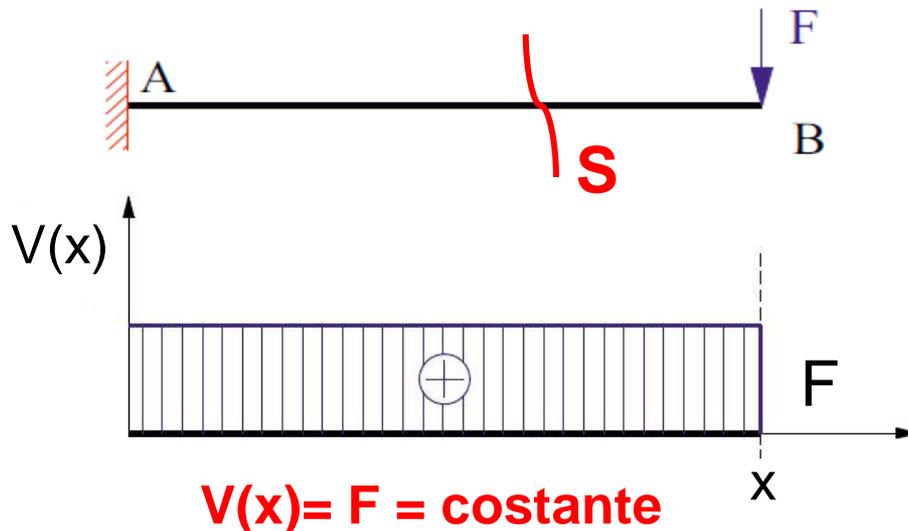
**Reazioni
Vincolari**

SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

Diagramma del Taglio

Fissando un sistema di riferimento con origine nel punto **A** si determina la caratteristica della sollecitazione in corrispondenza della sezione generica **S**.

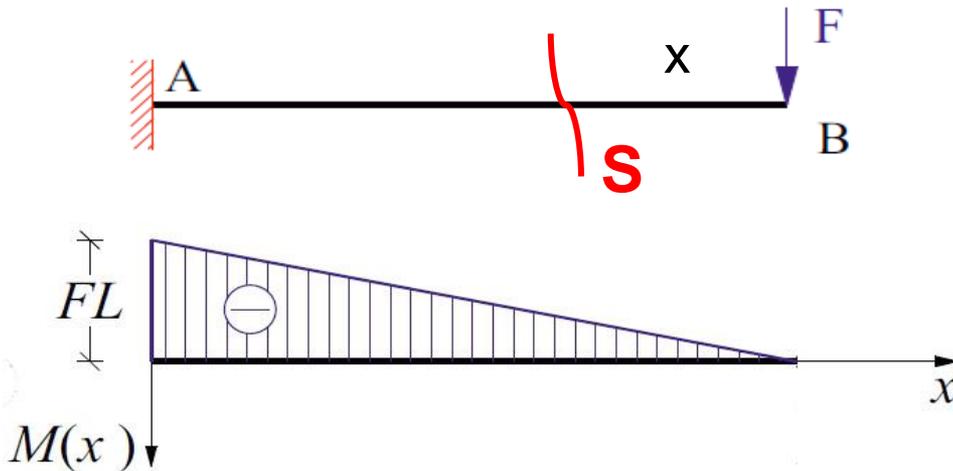
Considerando le forze a destra di **S**, il verso della caratteristica della sollecitazione V_S è quello positivo (faccia destra del concio)



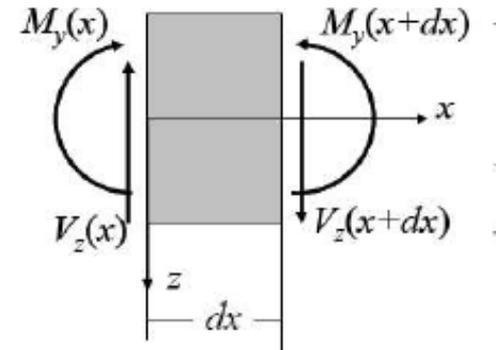
SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

Diagramma del Momento Flettente

Considerando sempre il sistema di riferimento con origine in **A** si determinare la caratteristica della sollecitazione nella sezione generica **S**. Il verso di M_S è negativo (faccia destra del concio)



$M(x) =$ funzione lineare tra 0 e L



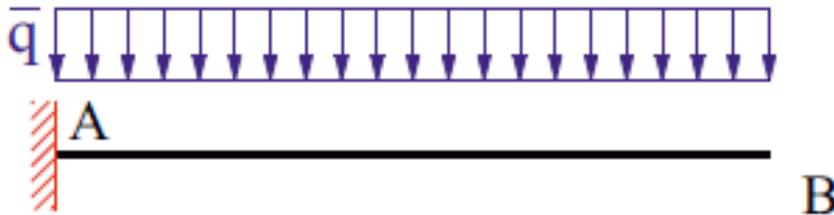
$$M(s) = -F \cdot x$$

$$M(B) = 0$$

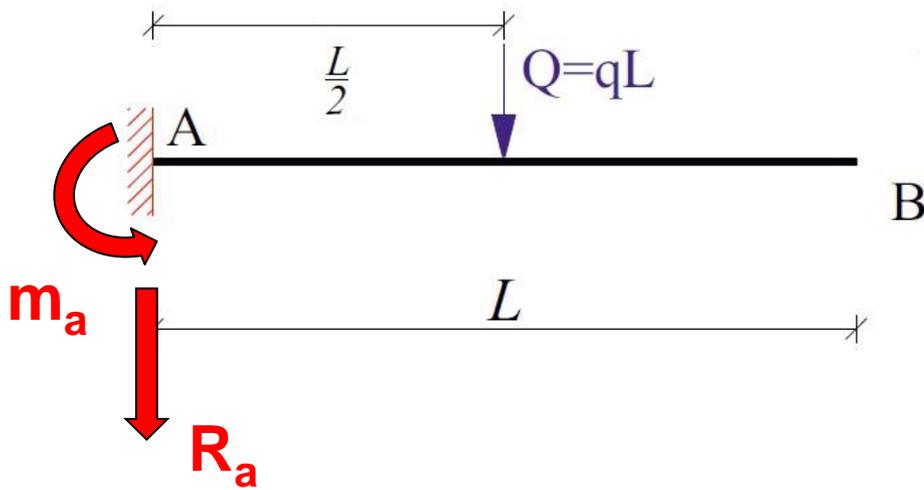
$$M(A) = -F \cdot L$$

SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

Si consideri ancora lo schema di trave a mensola soggetta ad un carico distribuito di intensità q



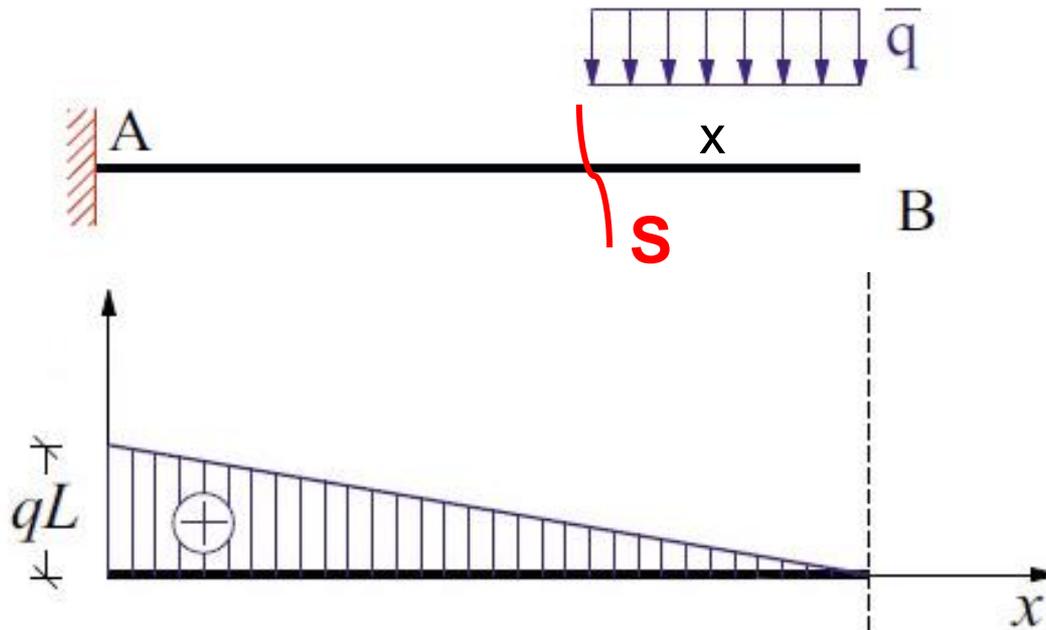
equazioni cardinali della statica



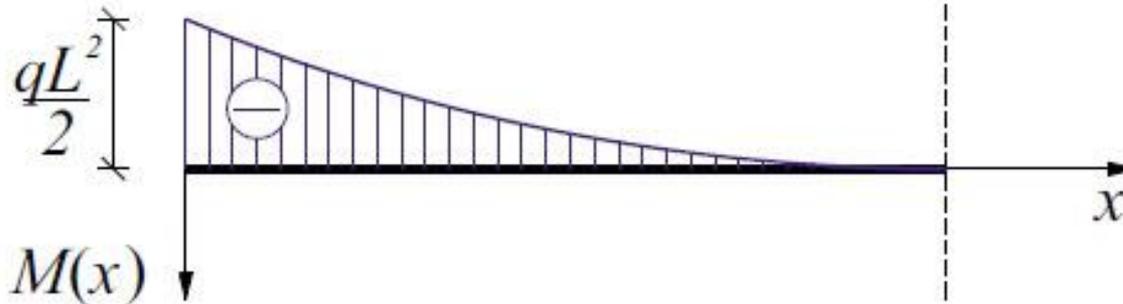
$$\left\{ \begin{array}{l} m_a - q \cdot L \cdot L/2 = 0 \\ R_A + q \cdot L = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} m_a = q/2 \cdot L^2 \\ R_A = - q \cdot L \end{array} \right.$$

R_A è diretta verso l'alto

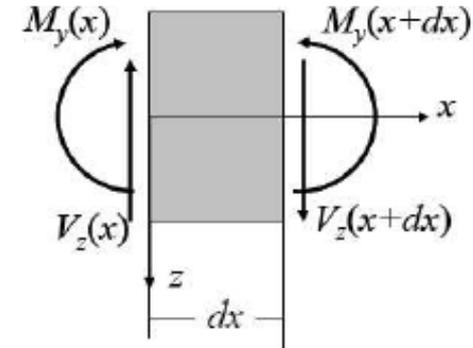
SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE



$V(x)$ = funzione lineare tra 0 e L



$M(x)$ = funzione quadratica tra 0 e L



$$V(s) = -q \cdot x$$

$$V(B) = 0$$

$$V(A) = -q \cdot L$$

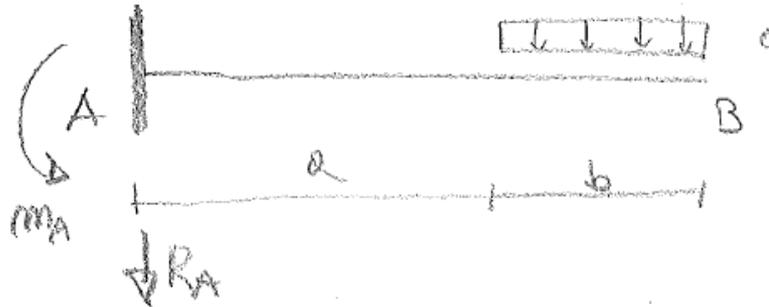
$$M(s) = -q/2 \cdot x^2$$

$$M(B) = 0$$

$$M(A) = -q/2 \cdot L^2$$

SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

Trave incastrata con carico distribuito (q) parziale



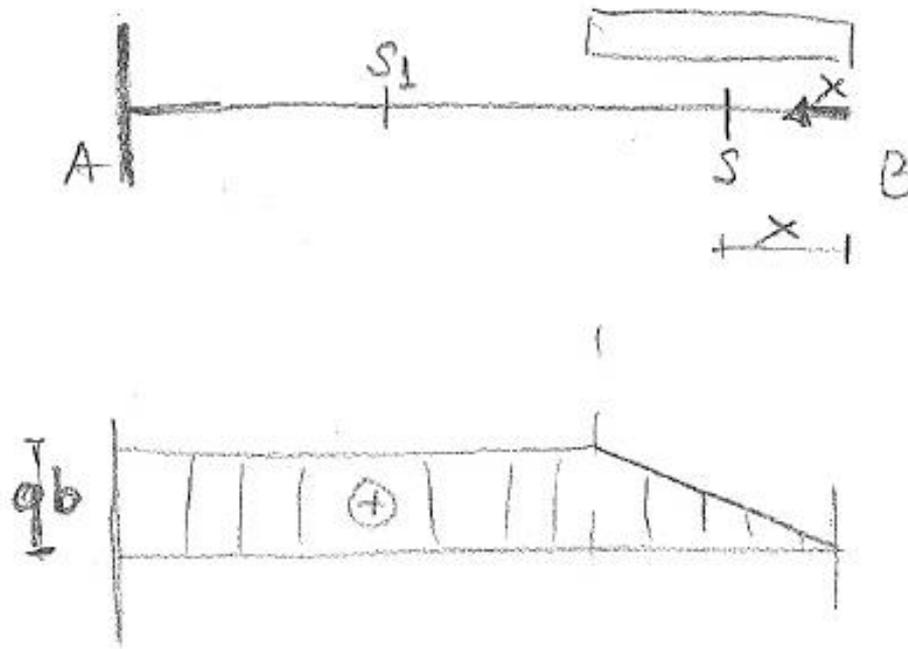
IL CARICO q È STATO
SOSTITUITO DA UNA FORZA
CONCENTRATA PARI A $q \cdot b$

REAZIONI
VINCOLARI

$$\begin{cases} M_A - qb\left(a + \frac{b}{2}\right) = 0 \\ R_A + qb = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} M_A = qb\left(a + \frac{b}{2}\right) \\ R_A = -qb \end{cases}$$

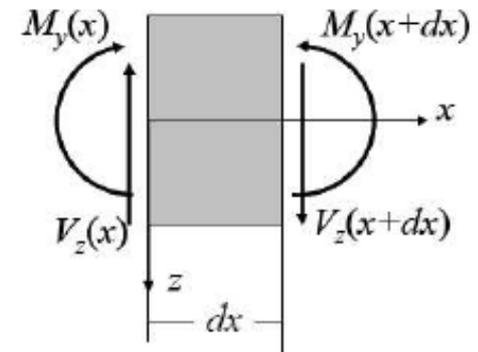
SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

Diagramma del Taglio



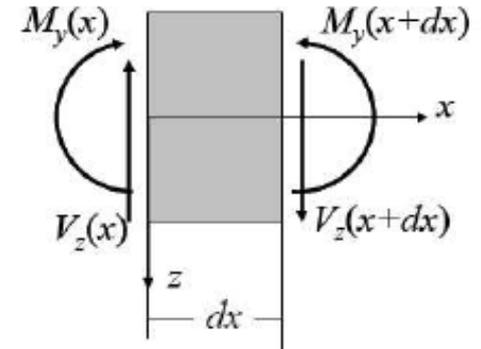
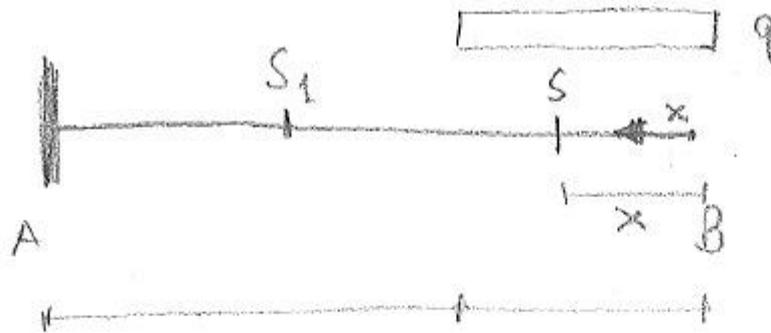
$$T(s) = qx \quad 0 < x < b$$

$$T(s_1) = qb \quad x > b$$



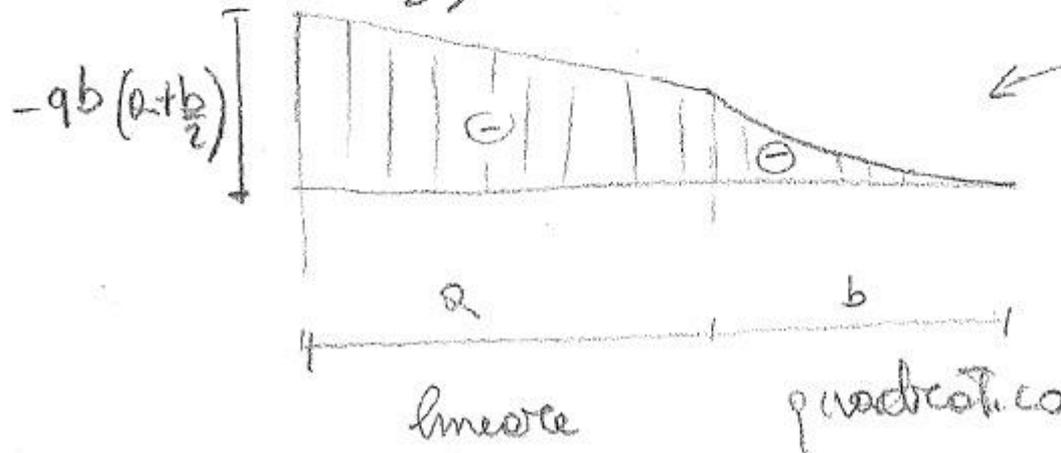
SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

Diagramma del Momento Flettente



$$M(s) = -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -q \frac{x^2}{2} \quad 0 < x < b$$

$$M(s_1) = -qb \left(x - \frac{b}{2}\right) \quad x > b$$

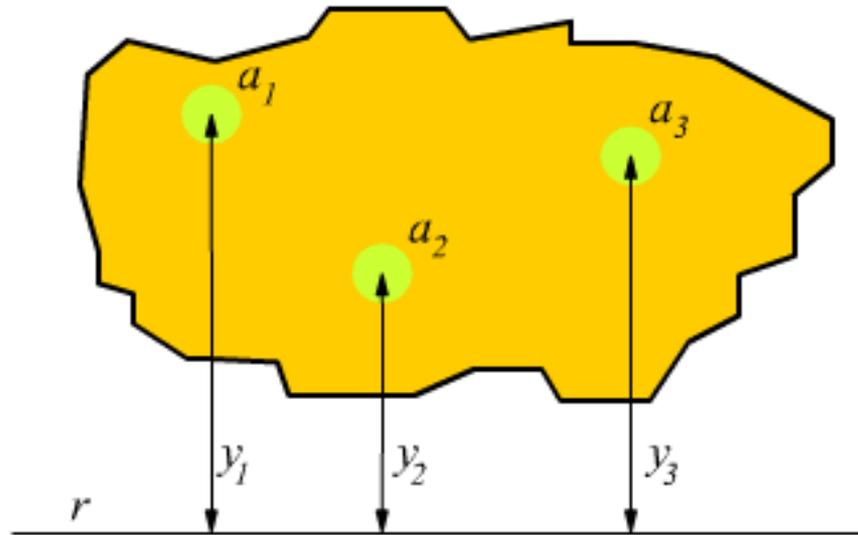


← Tensione & fibre superiori (negativa)

GEOMETRIA DELLE AREE

Momento STATICO (o di primo ordine)

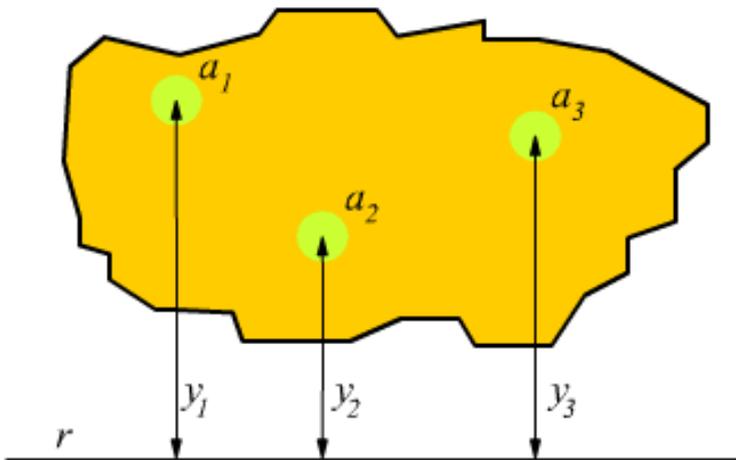
Ipotizziamo una generica superficie di area A e supponiamo che questa possa essere suddivisa in tante piccole aree elementari a_i



ipotizziamo, inoltre, una retta r complanare con la superficie data.

GEOMETRIA DELLE AREE

Si definisce **momento statico S** della superficie assegnata rispetto alla retta **r**, la somma algebrica dei prodotti delle aree elementari **a_i** per le rispettive distanze **y_i** dalla retta **r**

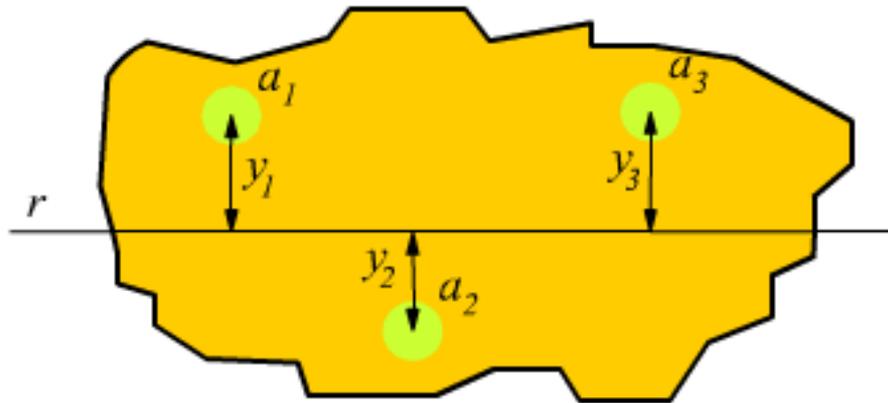


$$S = \sum_i a_i y_i \quad [L^3]$$

Il momento statico può assumere valori negativi, positivi o nulli in relazione alla posizione della retta rispetto la superficie. **Il momento statico è positivo quando la retta è esterna alla superficie**

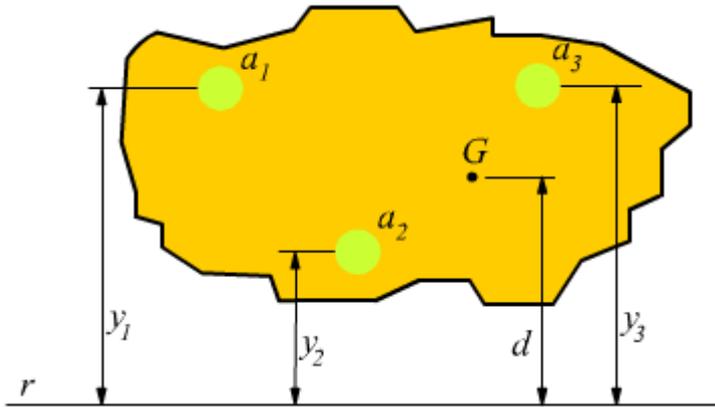
GEOMETRIA DELLE AREE

Il momento statico può risultare **negativo** quando la retta interseca la superficie ed i prodotti negativi sono più numerosi dei prodotti positivi. **Il momento statico è nullo quando i prodotti negativi uguagliano quelli positivi.**



Il momento statico di un sistema di forze rispetto a un punto o un asse è equivalente al **momento statico** della **risultante** dello stesso sistema di forze rispetto allo stesso punto o asse (**teorema di Varignon o dei momenti**)

GEOMETRIA DELLE AREE



$$S = \sum_i a_i y_i = Ad$$

A : area totale della superficie

d : distanza del baricentro della superficie G e la retta considerata

Se il momento statico, valutato rispetto alla retta **r**, si annulla

$$\sum_i a_i y_i = 0 \longrightarrow Ad = 0$$

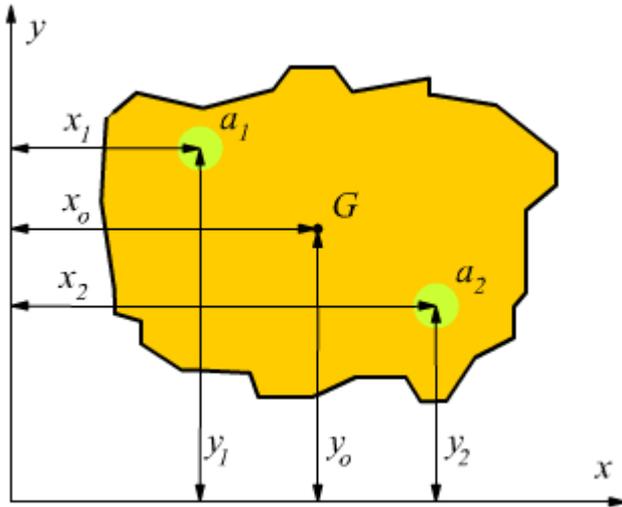
La relazione può essere soddisfatta solo per **d=0** quindi la retta **r** passa per il baricentro della figura piana.



Il momento statico di una superficie calcolato rispetto ad un qualsiasi asse baricentrico ha valore nullo

GEOMETRIA DELLE AREE

Questo dato può essere usato per la determinazione analitica del baricentro di una figura piana



Consideriamo un sistema di assi cartesiani di riferimento e calcoliamo i momenti statici rispetto all'asse **x** e all'asse **y**

$$S_x = \sum_i a_i y_i \quad S_y = \sum_i a_i x_i$$

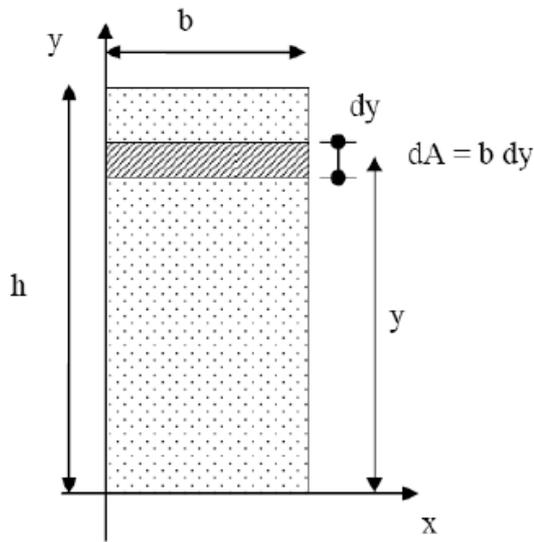
dal teorema di Varignon si ottengono le coordinate del baricentro

$$x_o = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_i a_i x_i}{A} \quad y_o = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_i a_i y_i}{A}$$

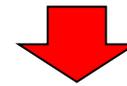
GEOMETRIA DELLE AREE

Momento Statico di un rettangolo

Per il rettangolo di base **b** ed altezza **h** valutiamo il momento Statico rispetto all'asse **x** considerando le aree infinitesimali $dA = b \cdot dy$

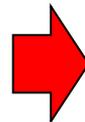


Il momento statico dell'area elementare dA rispetto all'asse **x** è dato dal prodotto dell'area dA per la sua distanza dall'asse **y**



$$S_x = \int_0^h y dA = \int_0^h b y dy = b \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{b h^2}{2}$$

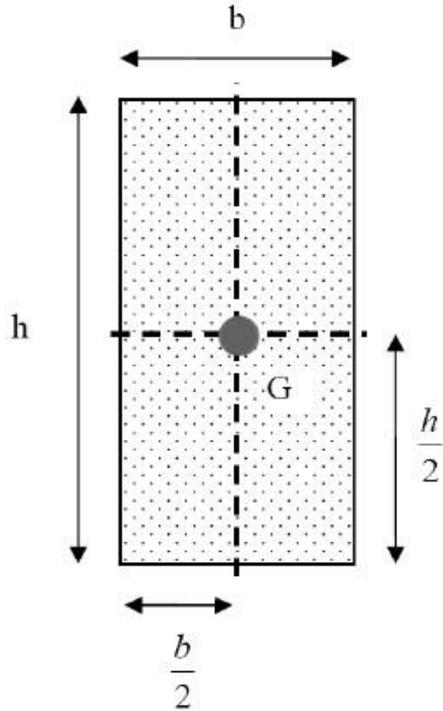
Rispetto all'asse **y**



$$S_y = \int_0^b x dA = \int_0^b h x dx = h \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b = \frac{h b^2}{2}$$

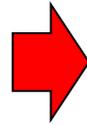
GEOMETRIA DELLE AREE

Ricordando il teorema di **Varignon**, la posizione del baricentro si può determinare dividendo il momento statico per l'area della figura geometrica:



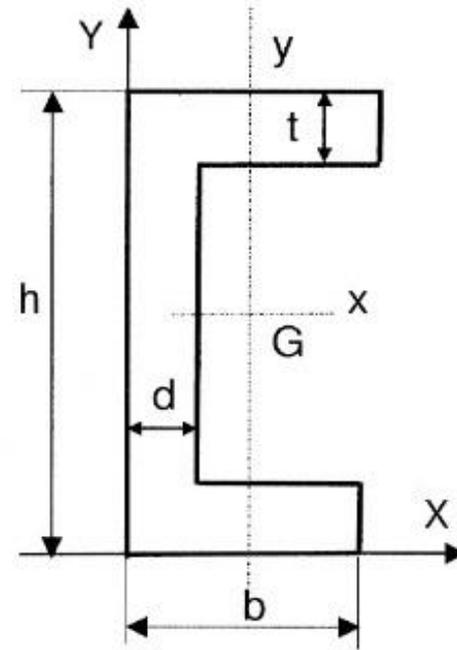
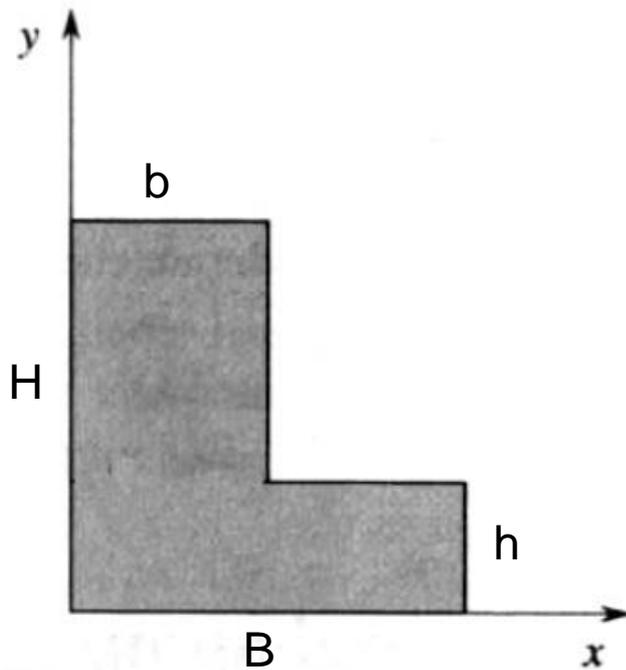
$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{b h^2}{2}}{b h} = \frac{h}{2}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{h b^2}{2}}{b h} = \frac{b}{2}$$



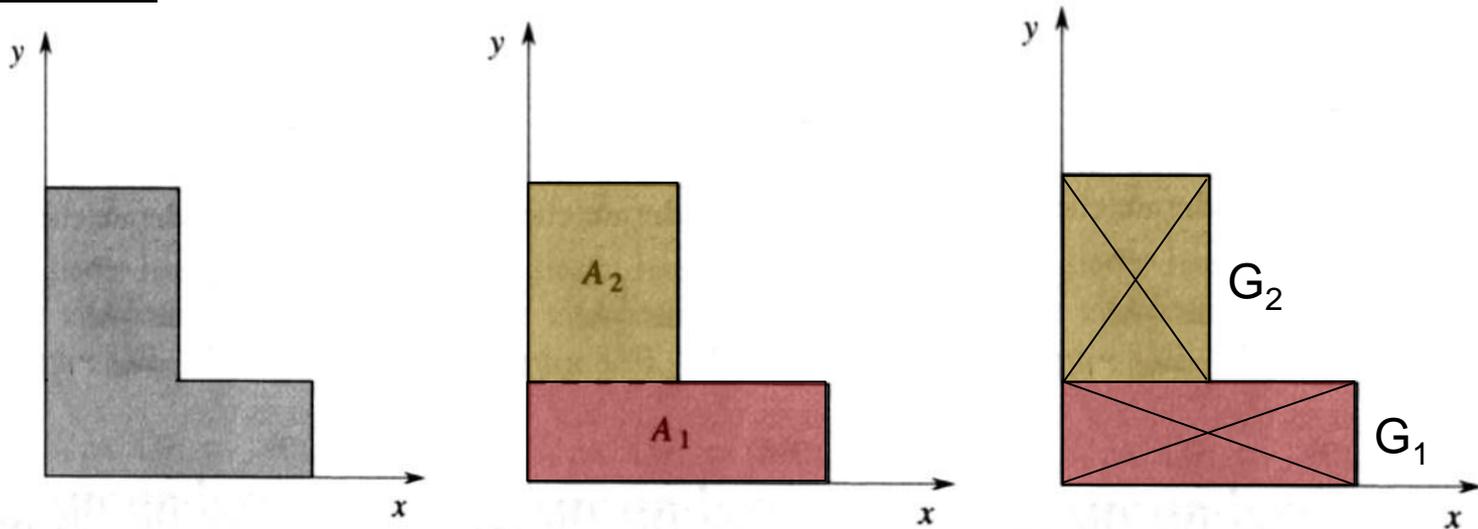
Si noti che se il sistema di riferimento x-y ha come origine il baricentro **G**, i momenti statici risulteranno nulli (**infatti il baricentro G dovrà avere coordinate $x=0$ e $y=0$**).

IL MOMENTO STATICO DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE



SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE

Si vogliono determinare i momenti statici (e quindi la posizione del baricentro) di sezioni di forma complessa di area **A**, ma scomponibili in una serie di figure elementari **A1, A2, ...An** delle quali sono note le posizioni dei baricentri:



si può sfruttare la seguente proprietà:

$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_{A_1} y \cdot dA_1 + \int_{A_2} y \cdot dA_2 + \dots + \int_{A_n} y \cdot dA_n$$

SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE

In questo caso si può anche scrivere come:

$$S_x = A_1 \cdot y_{G_1} + A_2 \cdot y_{G_2} + \dots + A_n \cdot y_{G_n} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{G_i}$$

Avendo indicato con \mathbf{A}_i e \mathbf{y}_{G_i} le aree e le ordinate rispetto all'asse \mathbf{x} dei baricentri delle singole aree elementari.

Analogamente per il momento statico rispetto all'asse \mathbf{y}

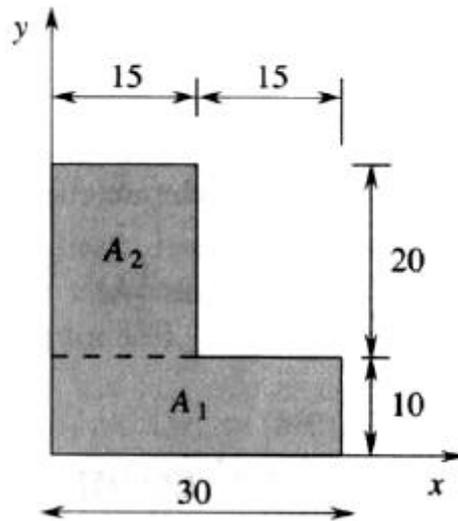
$$S_y = A_1 \cdot x_{G_1} + A_2 \cdot x_{G_2} + \dots + A_n \cdot x_{G_n} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{G_i}$$

La posizione del **baricentro** della sezione di area \mathbf{A} si calcola dunque mediante le relazioni:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{G_i}}{A} \qquad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{G_i}}{A}$$

SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE

Si vuole determinare la posizione del baricentro della sezione a "L" considerando le dimensioni indicate in figura:



$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{G_i}}{A}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{G_i}}{A}$$

$$A_1 = 30 \cdot 10 = 300$$

$$x_{G_1} = 15 \quad y_{G_1} = 5$$

$$A_2 = 15 \cdot 20 = 300$$

$$x_{G_2} = 7.5 \quad y_{G_2} = 20$$

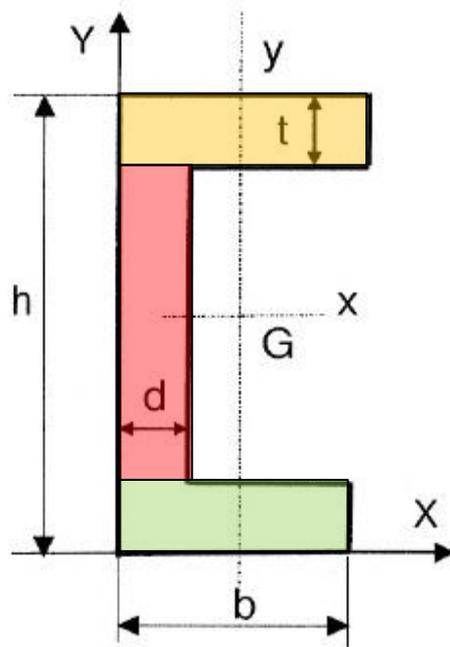
$$A = 300 + 300 = 600$$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{G_i}}{A} = \frac{A_1 \cdot x_{G_1} + A_2 \cdot x_{G_2}}{A_1 + A_2} = \frac{300 \cdot 15 + 300 \cdot 7.5}{300 + 300} = 11.25$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{G_i}}{A} = \frac{A_1 \cdot y_{G_1} + A_2 \cdot y_{G_2}}{A_1 + A_2} = \frac{300 \cdot 5 + 300 \cdot 20}{300 + 300} = 12.5$$

SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE

Si vuole determinare la **posizione del baricentro** della sezione a "C" considerando le dimensioni indicate in figura:



d=8 mm
t=20
b=100
h=160

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{G_i}}{A}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{G_i}}{A}$$

$$A_1 = (100 \cdot 20) = 2000 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = d \cdot (h - 2 \cdot t) = 8 \cdot (160 - 2 \cdot 20) = 8 \cdot 120 = 960 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = (100 \cdot 20) = 2000 \text{ mm}^2$$

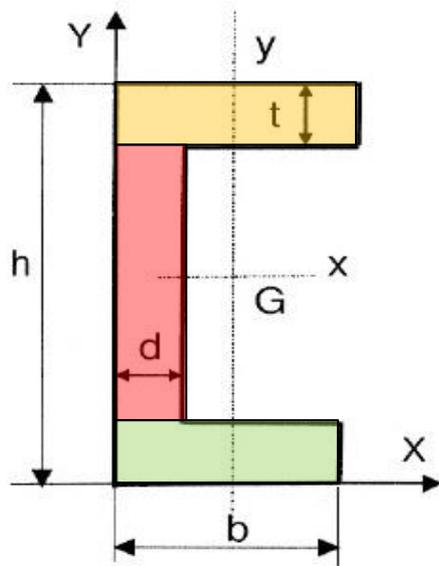
$$A = 2000 + 960 + 2000 = 4960 \text{ mm}^2$$

SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE

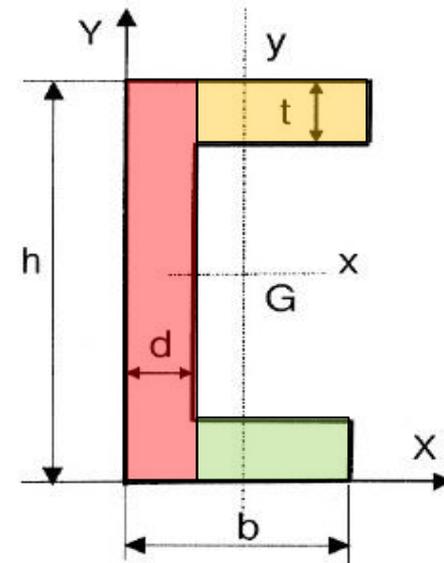
$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{G_i}}{A} = \frac{A_1 \cdot x_{G_1} + A_2 \cdot x_{G_2} + A_3 \cdot x_{G_3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{2000 \cdot 50 + 960 \cdot 4 + 2000 \cdot 50}{2000 + 960 + 2000} = 41.10 \text{ mm}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{G_i}}{A} = \frac{A_1 \cdot y_{G_1} + A_2 \cdot y_{G_2} + A_3 \cdot y_{G_3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{2000 \cdot 150 + 960 \cdot 80 + 2000 \cdot 10}{2000 + 960 + 2000} = 80 \text{ mm}$$

$$S_y = x_G \cdot A \Rightarrow S_y = 41.1 \cdot 4960 = 203856 \text{ mm}^3$$

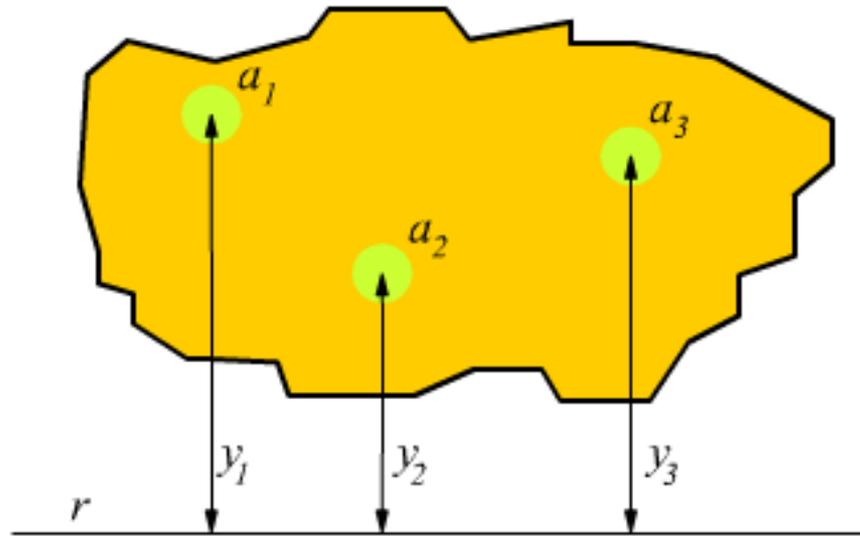


soluzioni
equivalenti



Momento di INERZIA (o di secondo ordine)

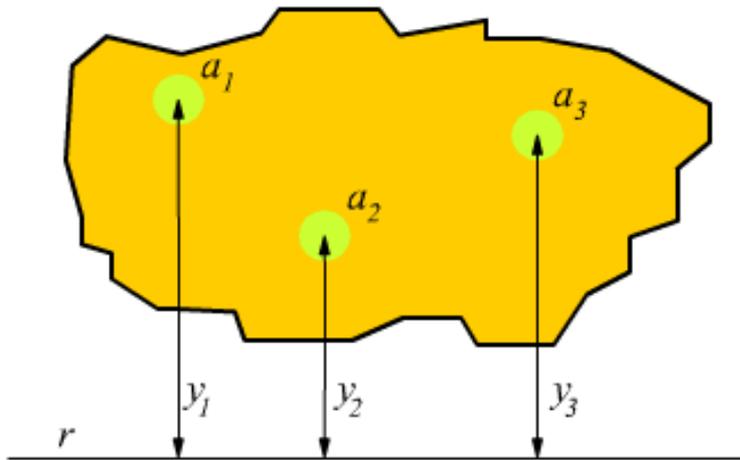
Ipotizziamo una generica superficie di area A e supponiamo che questa possa essere suddivisa in tante piccole aree elementari a_i



ipotizziamo, inoltre, una retta r complanare con la superficie data.

GEOMETRIA DELLE AREE

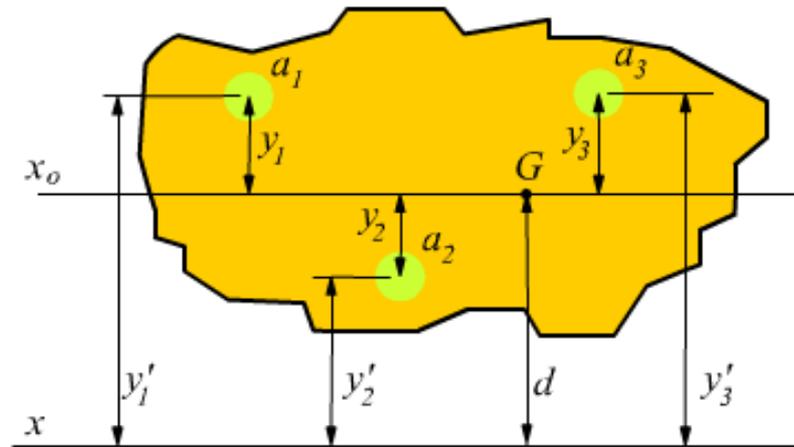
Viene definito **momento di inerzia I** della superficie, rispetto alla retta (**r**) assegnata, la sommatoria dei prodotti delle singole aree elementari **a_i** per i quadrati delle rispettive distanze **y_i** dalla retta **r**



$$I = \sum_i a_i y_i^2 \quad [L^4]$$

GEOMETRIA DELLE AREE

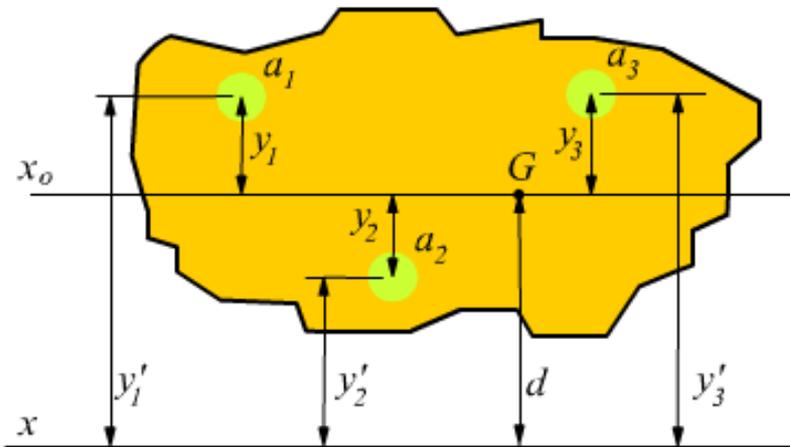
Consideriamo una superficie generica **A** di cui sia nota la posizione del baricentro **G** e sia I_{x_0} il momento di inerzia calcolato già in precedenza rispetto ad una retta x_0 passante per il baricentro



Come otteniamo il momento di inerzia I_x della superficie rispetto ad una retta x parallela ad x_0 e distante d da essa?

GEOMETRIA DELLE AREE

Applichiamo il **teorema Huygens di trasposizione**:
il momento di inerzia rispetto ad un asse generico x è uguale al momento di inerzia rispetto ad un asse baricentrico x_0 e parallelo al primo sommato al prodotto dell'area per la distanza d , tra i due assi, elevata al quadrato.



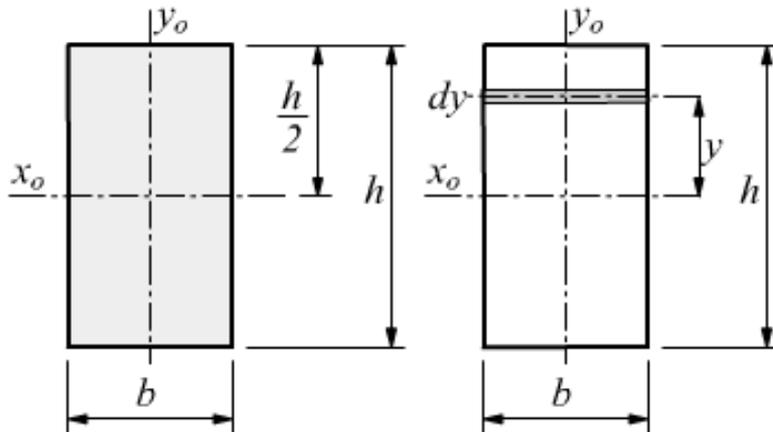
$$I_x = I_{x_0} + Ad^2$$

**Teorema di Huygens
di trasposizione**

GEOMETRIA DELLE AREE

Momento di Inerzia di un rettangolo

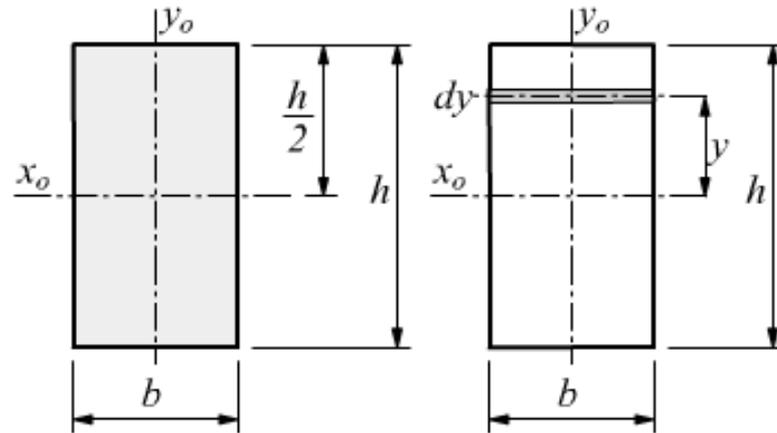
Per un rettangolo di base **b** ed altezza **h** il momento di inerzia rispetto all'asse baricentrico x_o parallelo alla base è



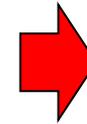
$$I_{x_o} = \sum_i a_i y_i^2$$

passando al calcolo differenziale possiamo pensare di porre l'area a_i in termini infinitesimi come $a_i = b \cdot dy$

GEOMETRIA DELLE AREE

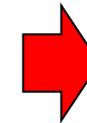


$$J_{x_o} = \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot y^2 dy = \left[\frac{1}{3} b y^3 \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{1}{3} b \left[\left(\frac{h}{2} \right)^3 - \left(-\frac{h}{2} \right)^3 \right]$$



$$J_{x_o} = \frac{bh^3}{12}$$

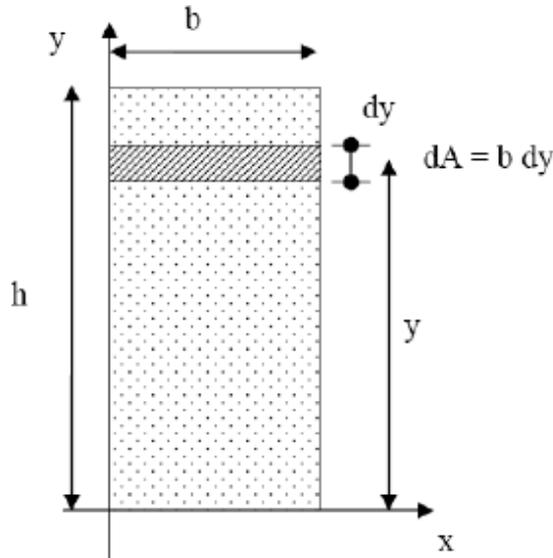
Se ci si riferisce all'asse verticale baricentrico y_o basta pensare di ribaltare il rettangolo applicando ad esso lo stesso procedimento scambiando le due dimensioni b ed h .



$$J_{y_o} = \frac{hb^3}{12}$$

GEOMETRIA DELLE AREE

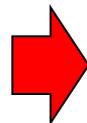
Supponiamo ora di voler valutare il momento di inerzia rispetto all'asse x passante per la base del rettangolo



$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot b \, dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h \cdot b = \frac{bh^3}{3}$$

Applichiamo il teorema di trasporto per trovare I_x a partire da I_{x_0}

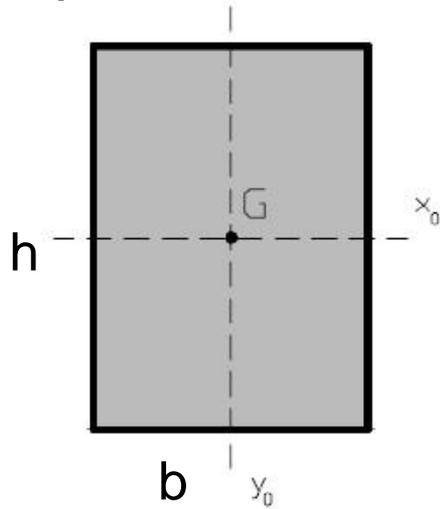
$$I_x = I_{x_0} + Ad^2$$



$$I_x = I_{x_0} + bh \left[\frac{h}{2} \right]^2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

GEOMETRIA DELLE AREE

Va specificato che gli assi x_0 e y_0 baricentrici sono anche “**assi principali di inerzia**”. Infatti, un asse baricentrico è asse principale di inerzia quando il momento di inerzia rispetto ad esso è massimo oppure minimo.



$$J_{x_0} = \frac{bh^3}{12}$$

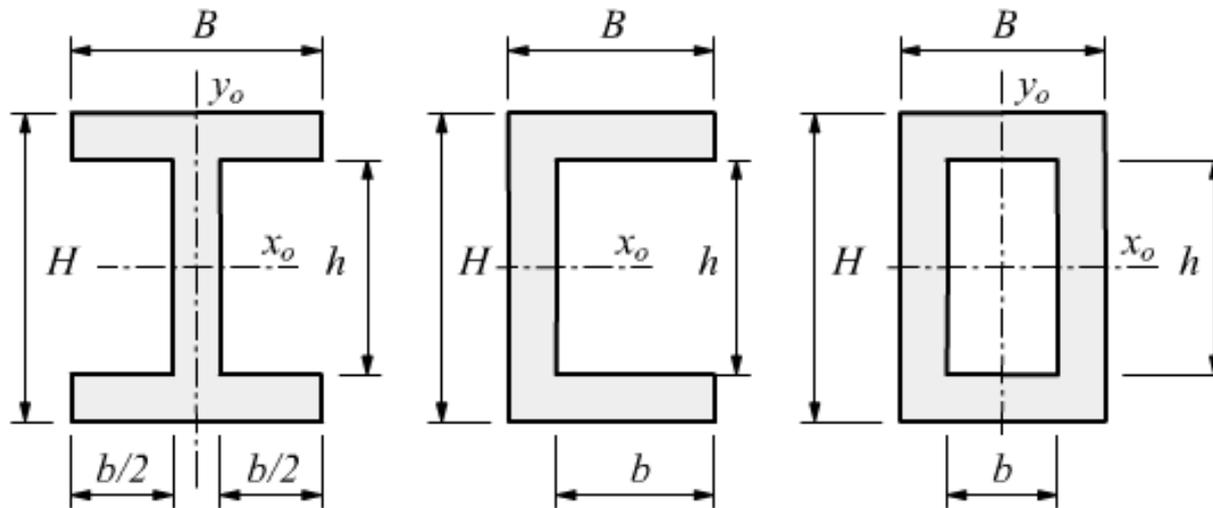
max

$$J_{y_0} = \frac{hb^3}{12}$$

min

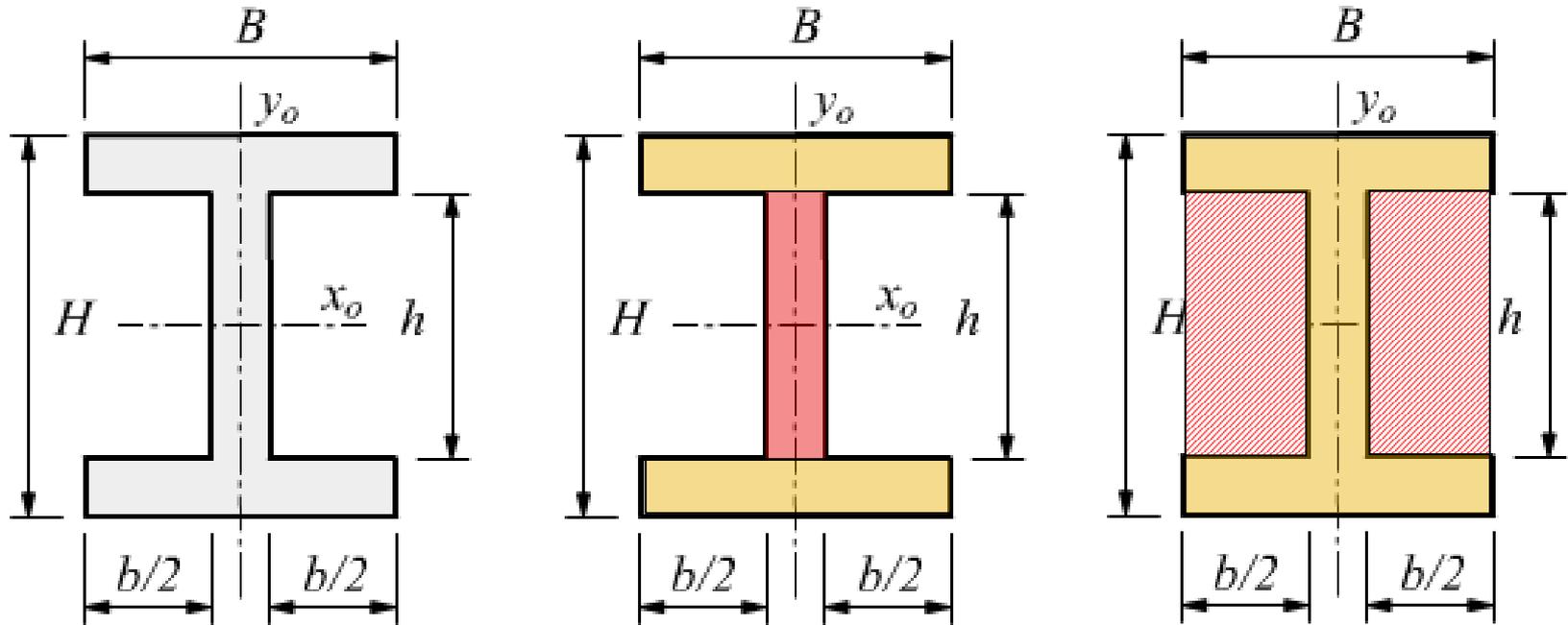
Nel caso del rettangolo I_{x_0} è il momento di inerzia massimo e I_{y_0} rappresenta il momento di inerzia minimo. **Per una sezione doppiamente simmetrica, quindi, gli assi di simmetria sono anche assi principali di inerzia.**

IL MOMENTO DI INERZIA DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE



SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE

Si vogliono calcolare i momenti di inerzia lungo i due assi baricentrici di una sezione a “doppio T”:



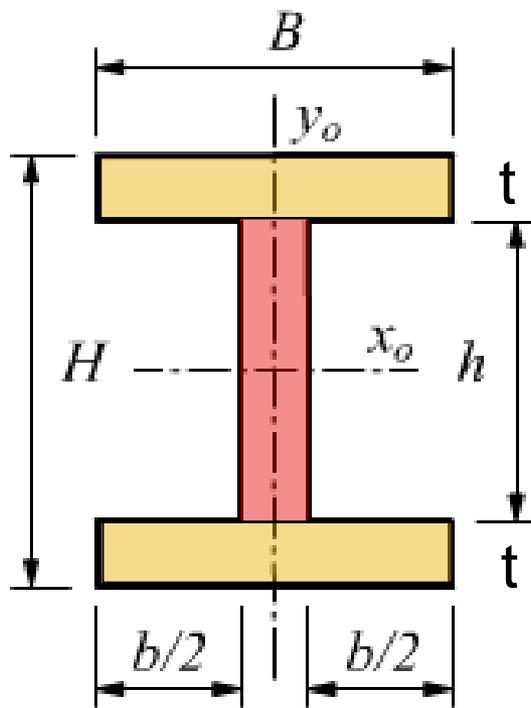
Soluzione 1

Soluzione 2

E' possibile individuare due assi di simmetria (x_0, y_0) e dunque il loro punto di intersezione (**G**) è il baricentro.

SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE

Soluzione 1



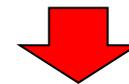
$$t = (H - h) / 2$$

Il momento di inerzia della sezione rispetto ad x_0 può essere calcolato come **somma** dei momenti di inerzia di figure elementari:

$$I_{x_0} = I_{1,x_0} + 2 \cdot I_{2,x_0}$$

$$I_{1,x_0} = b/12 \cdot h^3$$

$$I_{2,x_0} = B/12 \cdot t^3 + (B \cdot t) \cdot (h/2 + t/2)^2$$

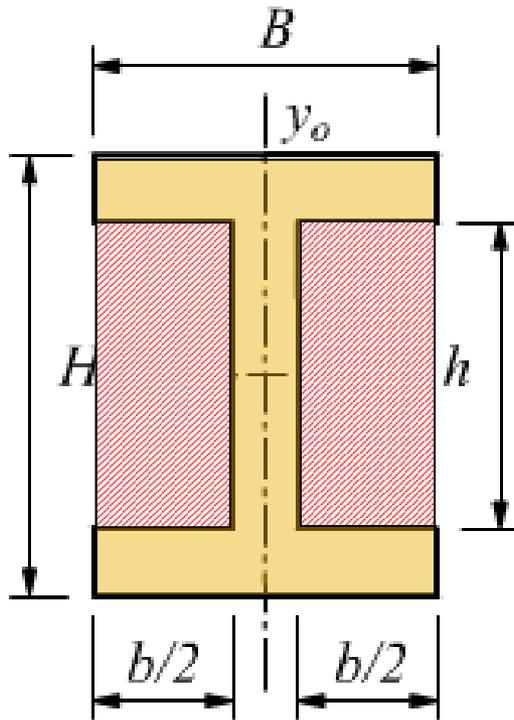


$$I_{x_0} = b/12 \cdot h^3 + B/6 \cdot t^3 + 2 \cdot (B \cdot t) \cdot (h/2 + t/2)^2$$

SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE

Soluzione 2

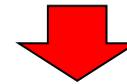
Il momento di inerzia della sezione rispetto ad x_0 può essere calcolato come **differenza** tra i momenti di inerzia di figure elementari:



$$I_{x_0} = I_{1,x_0} - 2 \cdot I_{2,x_0}$$

$$I_{1,x_0} = B/12 \cdot H^3$$

$$I_{2,x_0} = (b/2)/12 \cdot h^3$$



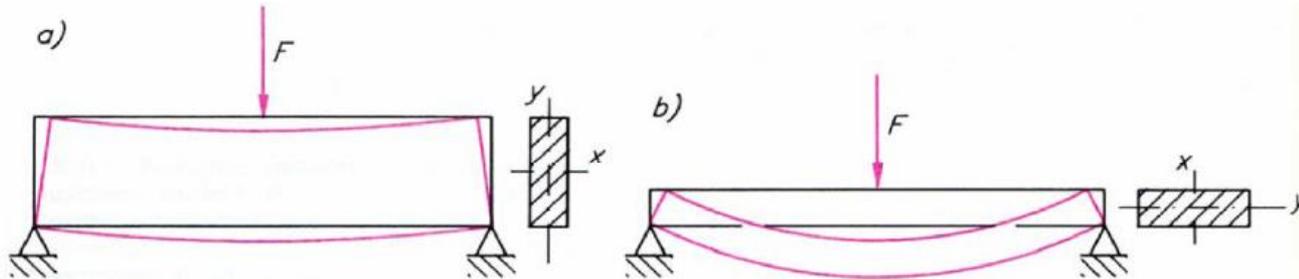
$$I_{x_0} = B/12 \cdot H^3 - b/12 \cdot h^3$$

CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

È bene sottolineare che i **momenti d'inerzia** assumono un significato fisico più interessante, dal punto di vista statico, del puro e semplice significato geometrico.

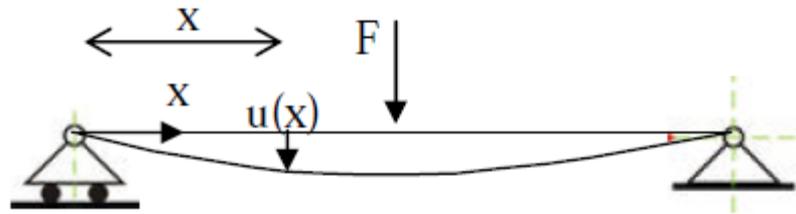
L'esperienza insegna che una trave (di legno o di acciaio o di altro materiale) si inflette (**deforma**) in maniera diversa a seconda di come viene disposta sotto un carico:



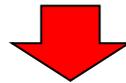
A parità di materiale impiegato, elementi strutturali con sezioni piane di forma e dimensioni diverse, cioè con diverso momento d'inerzia, **hanno diverse capacità di resistenza alle sollecitazioni**.

CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

Il calcolo della deformata di una trave corrisponde a trovare una funzione $u(x)$ che rappresenta lo spostamento della trave ad una generica distanza x dall'origine del sistema di riferimento (**posizione indeformata**).



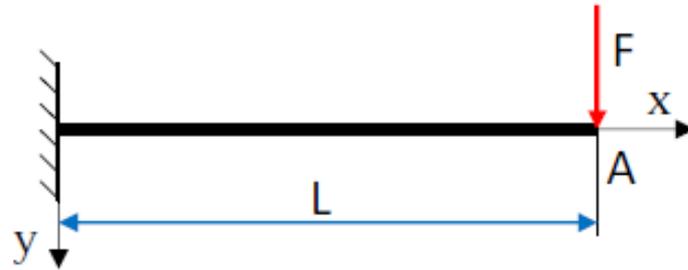
Nell'esempio dunque $u(x)$ definisce l'**abbassamento** in ogni sezione della trave provocato da una forza concentrata F .



Il calcolo della deformata, estesa a tutta la trave, presuppone l'applicazione della **teoria della linea elastica**

CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

La trave a mensola ha sezione trasversale costante e porta un carico F nella sua estremità libera A . Si vuole determinare, sfruttando la teoria della linea elastica, lo spostamento e la rotazione in A :



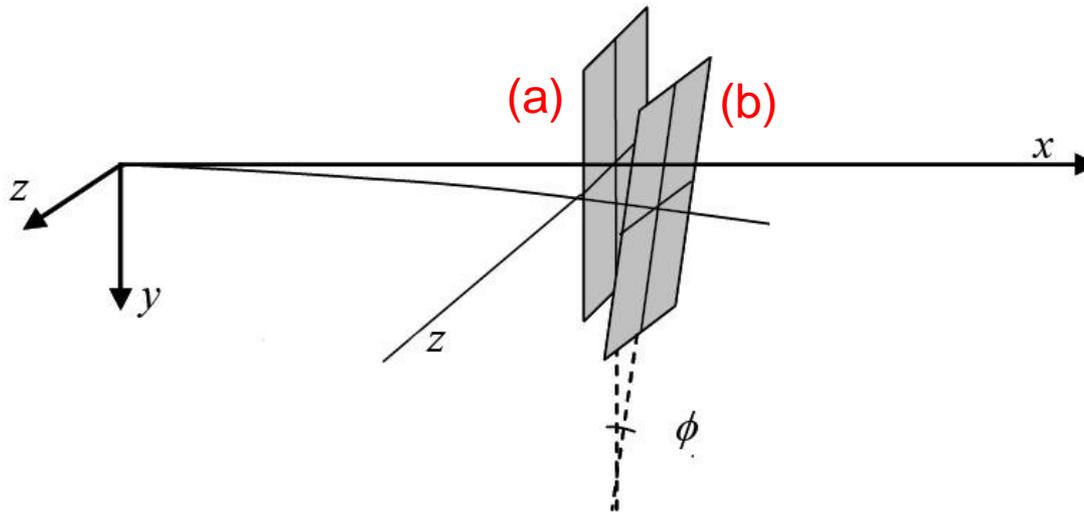
Ricordiamo l'equazione differenziale della linea elastica:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -M(x)$$

l'asse x coincide con l'asse della trave, lo spostamento v_x è orientato come l'asse y mentre l'asse z è orizzontale. Si definisce **rigidezza flessionale** il prodotto EJ .

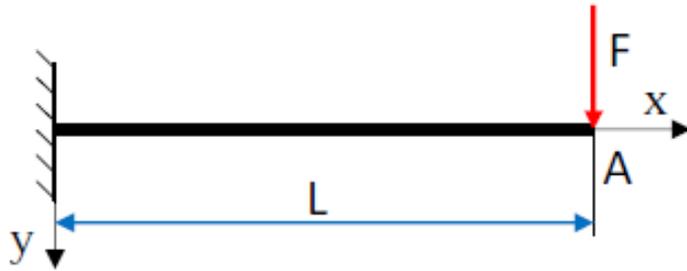
CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

Nella figura successiva è rappresentata una sezione della trave sia in **condizioni indeformate (a)** che in **condizioni deformate (b)** dopo l'applicazione di un carico.



Si vede che la rotazione della sezione (Φ) avviene attorno ad un asse parallelo all'asse **z**. In questo caso quindi, il momento di inerzia da tenere in conto nel calcolo della rigidità flessionale deve essere quello **baricentrico rispetto all'asse z**.

CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI



Equazione del momento flettente

$$M(x) = F \cdot (x - L)$$

Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica otteniamo:

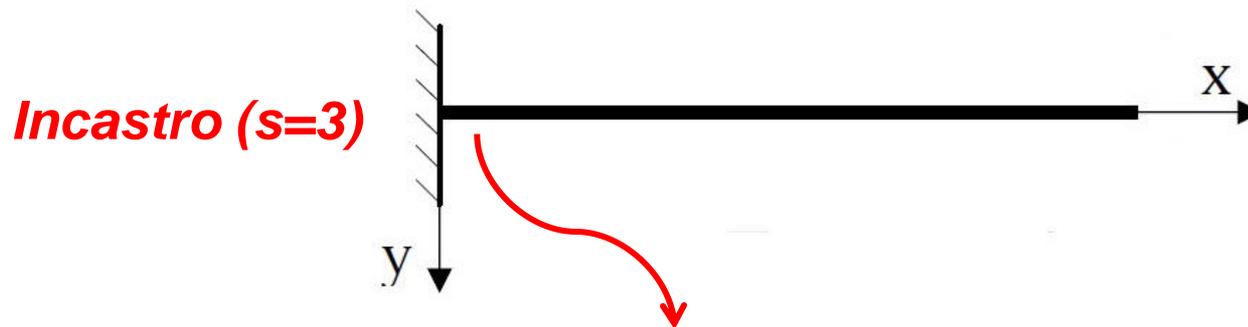
$$E \cdot J_z \cdot \frac{dv(x)}{dx} = E \cdot J_z \cdot \vartheta(x) = -F \cdot \int (x - L) \cdot dx = -F \cdot \left(\frac{x^2}{2} - L \cdot x + c_1 \right)$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot v(x) = \int -F \cdot \left(\frac{x^2}{2} - L \cdot x + c_1 \right) \cdot dx = -F \cdot \left(\frac{x^3}{6} - L \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \cdot x + c_2 \right)$$

CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

Le condizioni al contorno sono le seguenti:



a) Per $x = 0$	$y(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$
b) Per $x = 0$	$\vartheta(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$

Di conseguenza l'equazione della linea elastica è:

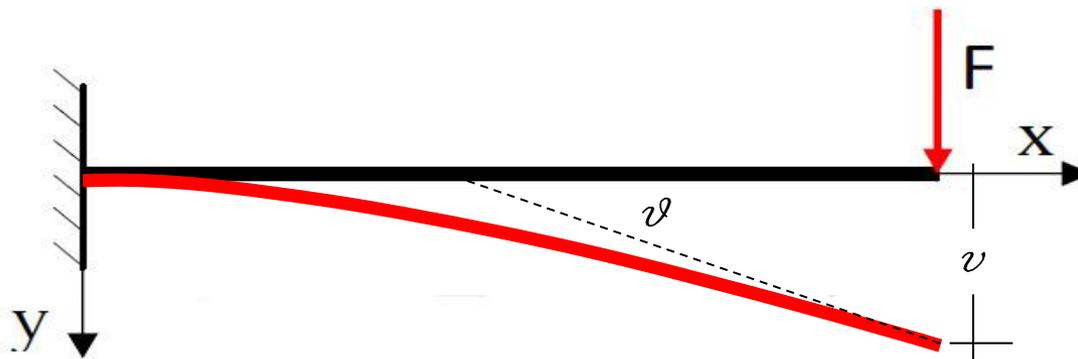
$$v(x) = \frac{-F \cdot \left(\frac{x^3}{6} - L \cdot \frac{x^2}{2} \right)}{E \cdot J_z} = \frac{-F \cdot x^2 \cdot (x - 3 \cdot L)}{6 \cdot E \cdot J_z}$$

CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

In corrispondenza dell'estremo libero lo spostamento (**freccia**) e la **rotazione** valgono:

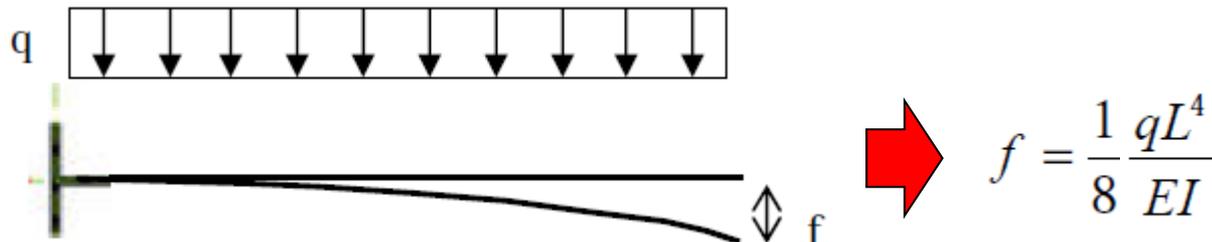
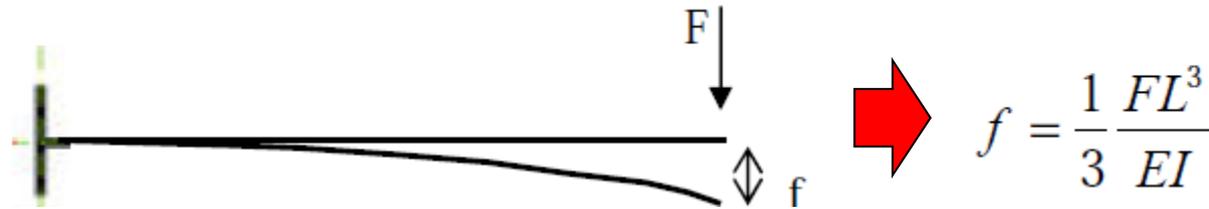
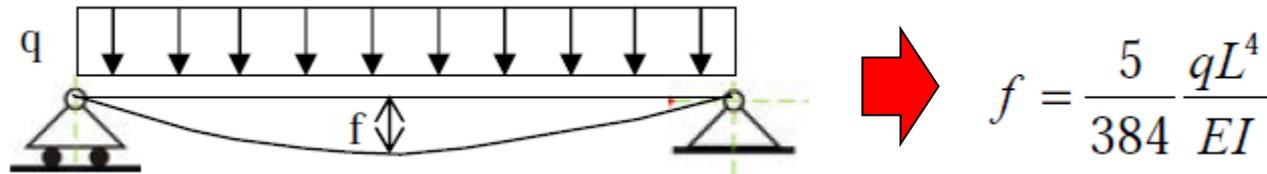
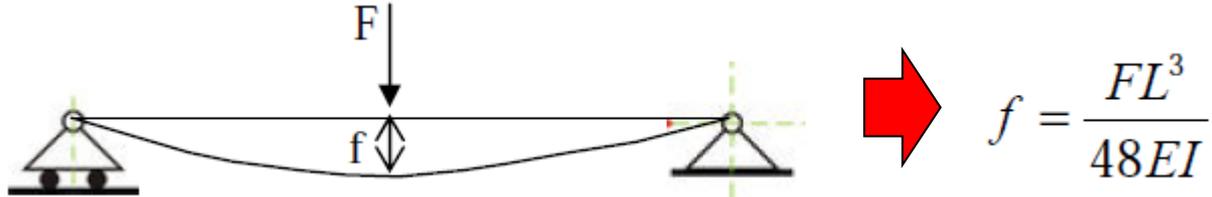
$$v(x = L) = \frac{-F \cdot \left(\frac{L^3}{6} - L \cdot \frac{L^2}{2} \right)}{E \cdot J_z} = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J_z}$$

$$\vartheta(x = L) = \frac{-F \cdot \left(\frac{L^2}{2} - L \cdot L \right)}{E \cdot J_z} = \frac{F \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot J_z}$$



CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

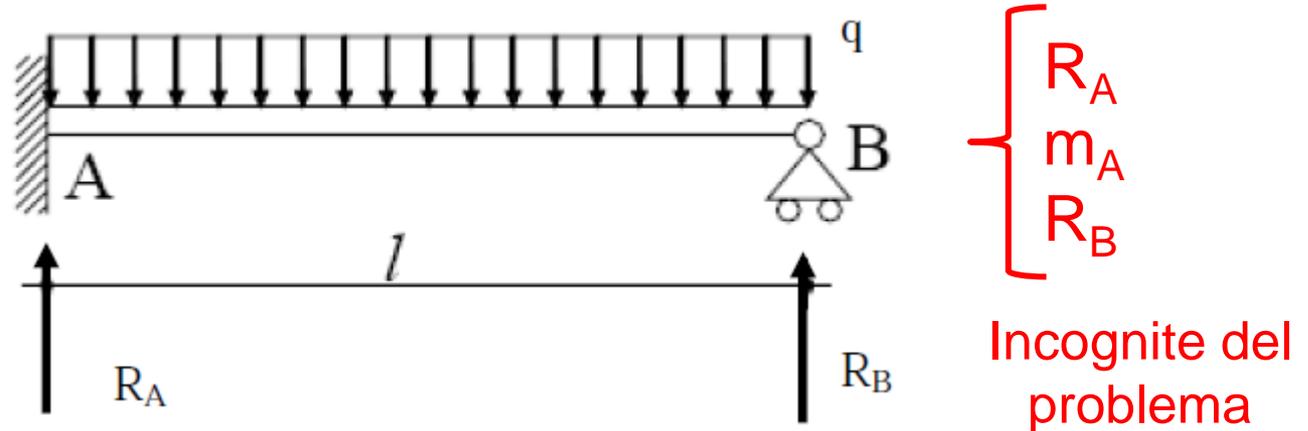
Valori della freccia (f) per alcuni schemi isostatici:



SISTEMI IPERSTATICI

SISTEMI IPERSTATICI

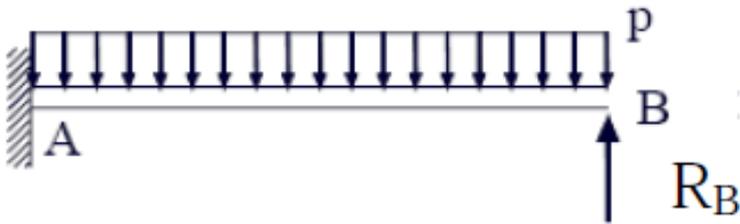
Si consideri la trave in figura. Essa è una volta iperstatica infatti $3t-s = 3-4=-1$ (l'incastro elimina 3 g.d.l. e il carrello ne elimina uno).



Non è possibile calcolare le reazioni vincolari sulla base di sole condizioni di equilibrio, ossia applicando direttamente le equazioni cardinali della statica, in quanto il numero di incognite (**3**) è maggiore del numero di equazioni di equilibrio a disposizione (**2**).

SISTEMI IPERSTATICI

Sarà pertanto necessario considerare anche le **equazioni di congruenza** utilizzando il metodo delle forze (si sostituiscono i vincoli sovrabbondanti con le rispettive reazioni vincolari).

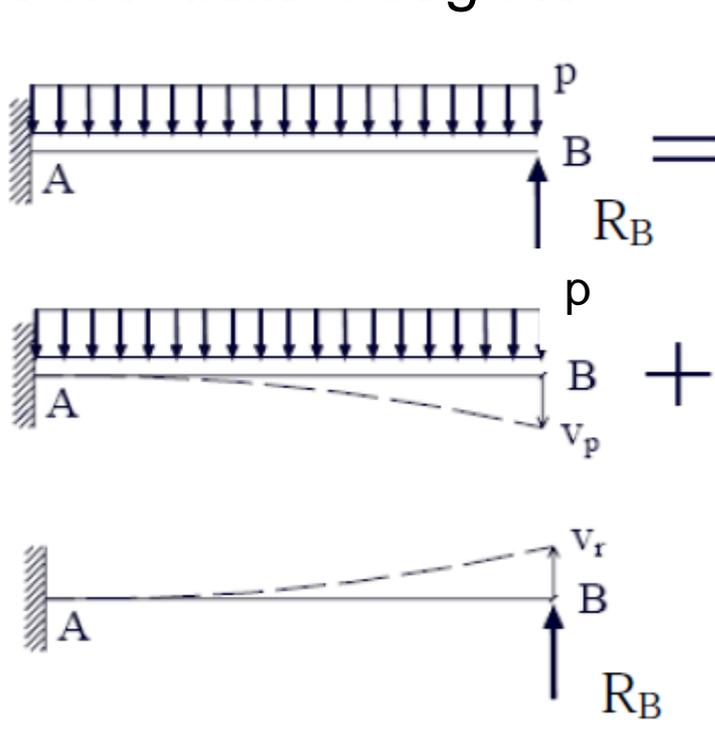


Il carrello in **B** è sostituito con la corrispondente reazione vincolare R_{yB} , assunta come incognita iperstatica.

Sul sistema isostatico agiscono il carico **p** (noto) e la forza **R_B** (incognito).

SISTEMI IPERSTATICI

Tramite il **principio di sovrapposizione degli effetti**, la mensola può essere considerata come il risultato della somma di due mensole diversamente caricate: la prima con il carico distribuito noto, la seconda con il carico concentrato incognito.



Per la congruenza con il vincolo in **B**

$$V_p + V_r = 0$$

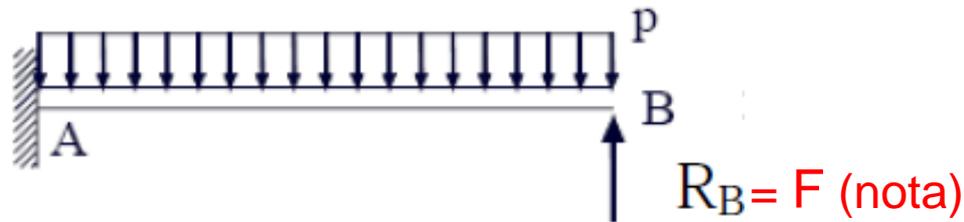
$$V_p = \frac{1}{8} \frac{qL^4}{EI} \quad \text{positivo}$$

$$V_r = \frac{R_B l^3}{3EI} \quad \text{negativo}$$

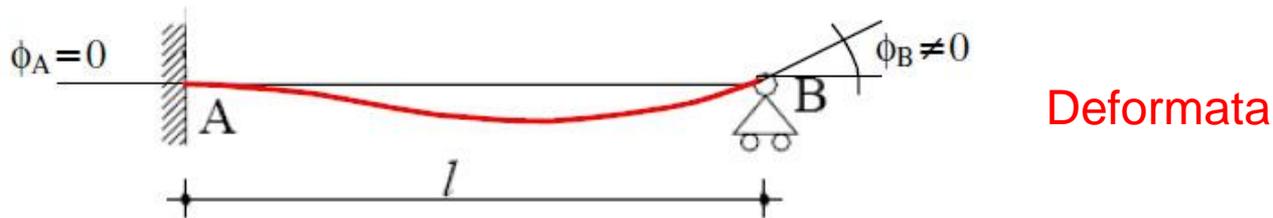
Risolvendo $R_B = \frac{3}{8} ql$

SISTEMI IPERSTATICI

Nota la reazione vincolare si ritorna di fatto ad un sistema isostatico (**trave semplicemente incastrata**) sul quale agiscono un carico uniformemente distribuito (p) ed una forza concentrata ($F = R_B$).

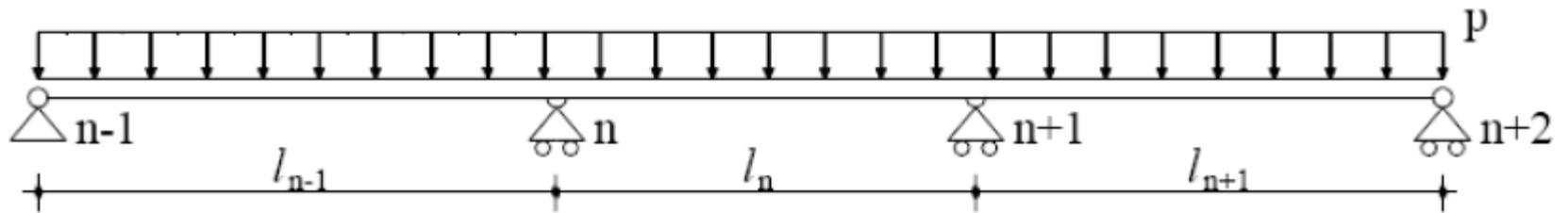


Si possono così ricavare le altre reazioni vincolari (R_A, m_A) e le sollecitazioni interne (M, V) applicando la sovrapposizione degli effetti causati dai due carichi (q, F).

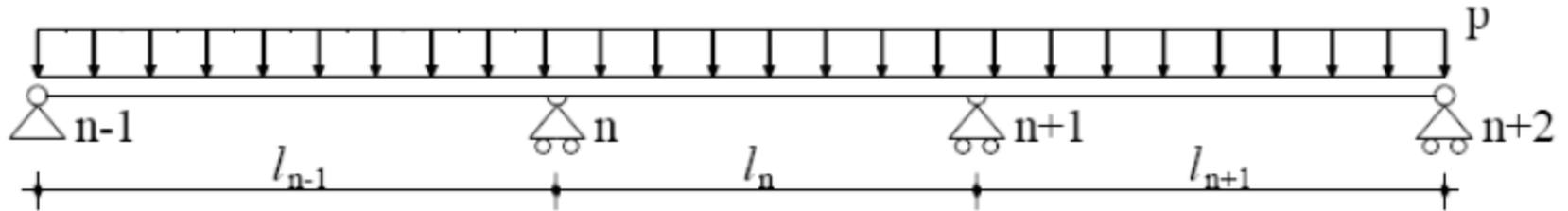


SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

TRAVE CONTINUA SU PIÙ APPOGGI



SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE



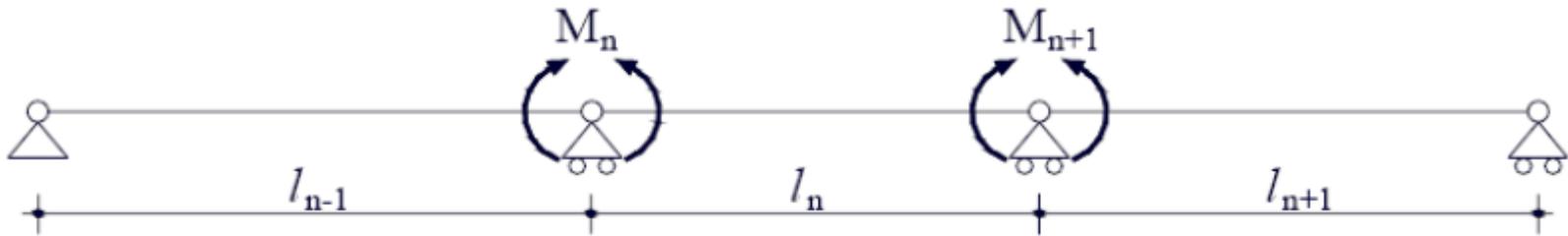
La trave è caratterizzata da **4** appoggi e **3** campate (per campata intendiamo quella parte dell'intera trave compresa tra 2 appoggi).

Il grado di iperstaticità vale **$3t-s = 3-5=-2$** , quindi la trave è **2 volte iperstatica**.

Infatti eliminando i due carrelli centrali la trave sarebbe ancora isostatica.

SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

In questo caso conviene assumere come **incognite iperstatiche** i valori dei momenti che si sviluppano in corrispondenza dei due carrelli centrali.

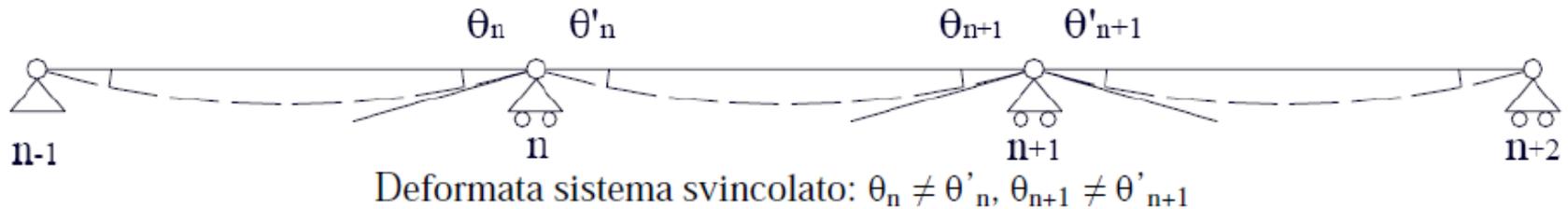


Si interrompe, quindi, la continuità della trave introducendo **due cerniere in corrispondenza degli appoggi** e si ripristina il sistema statico iniziale applicando in questi nodi le reazioni corrispondenti ai vincoli eliminati.

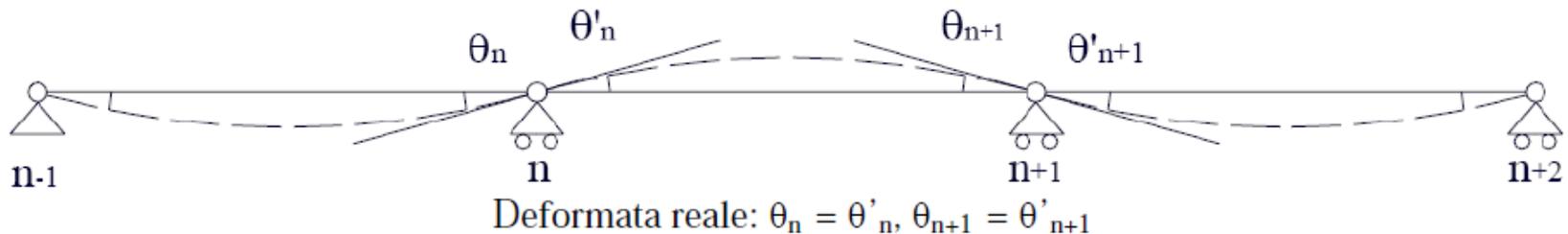
Le reazioni vincolari M_n ed M_{n+1} devono essere tali da **garantire la congruenza** degli spostamenti negli appoggi.

SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

L'introduzione delle cerniere permetterebbe, in teoria, a due tronchi di trave contigui di ruotare liberamente l'uno rispetto all'altro:



Nel sistema reale invece gli stessi tronchi di trave sono collegati attraverso un vincolo di continuità che impone l'uguaglianza delle rotazioni a sinistra e a destra del vincolo:

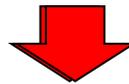


SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

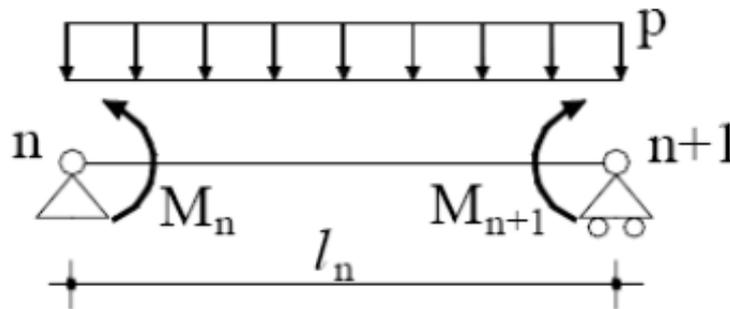
Pertanto, per la congruenza, si deve avere:

$$\theta_n = \theta'_n \qquad \theta_{n+1} = \theta'_{n+1}$$

Le due **equazioni di congruenza**, sommate alle **equazioni di equilibrio** consentono di risolvere il problema 2 volte iperstatico.

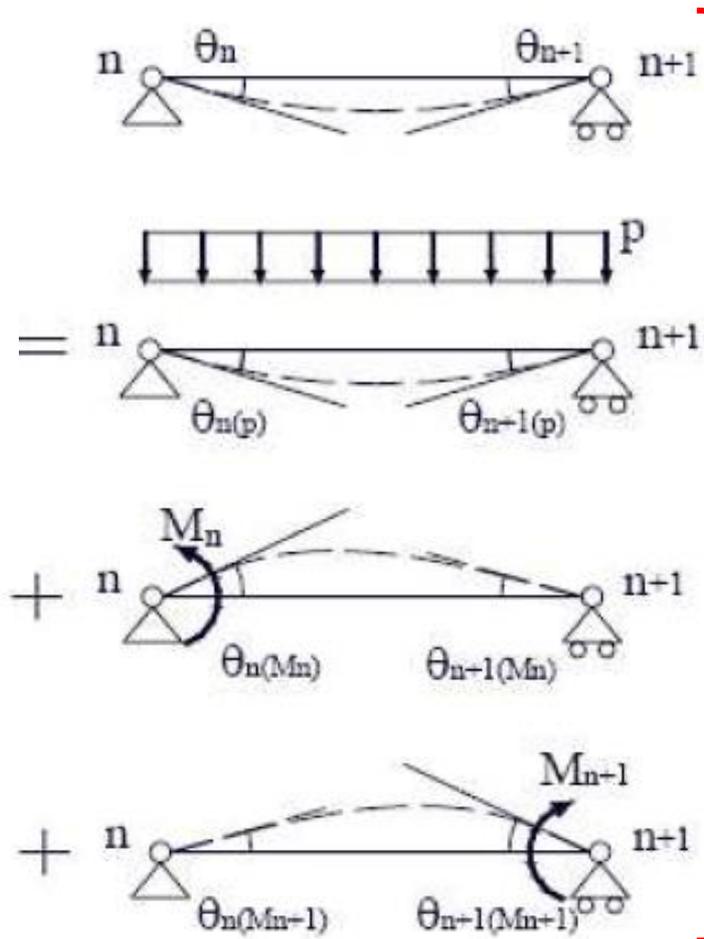


Sulla singola campata resa isostatica si avrà il seguente **sistema** detto **isostatico equivalente**:



SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

Tale sistema può essere visto come somma di tre singoli sistemi su cui agiscono singolarmente i diversi carichi:



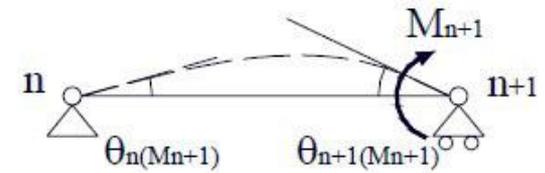
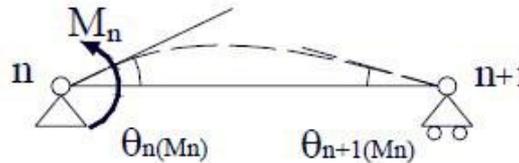
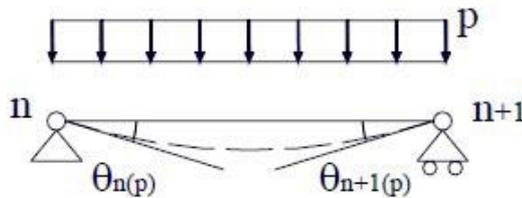
Le rotazioni in n ed $n+1$ valgono

$$\theta_n = \theta_{n(p)} + \theta_{n(Mn)} + \theta_{n(Mn+1)}$$

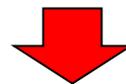
$$\theta_{n+1} = \theta_{n+1(p)} + \theta_{n+1(Mn)} + \theta_{n+1(Mn+1)}$$

SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

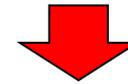
Tramite la teoria della **linea elastica** e considerando per tutta la trave **$EJ=costante$** , si ricavano i singoli addendi che definiscono le rotazioni in **n** ed **n+1**.



$$\theta_{n(p)} = -\frac{l_n^3}{24E_n J_n} p$$



$$\theta_{n(Mn)} = \frac{l_n}{3E_n J_n} M_n$$



$$\theta_{n(Mn+1)} = \frac{l_n}{6E_n J_n} M_{n+1}$$

$$\theta_{n+1(p)} = \frac{l_n^3}{24E_n J_n} p$$

$$\theta_{n+1(Mn)} = -\frac{l_n}{6E_n J_n} M_n$$

$$\theta_{n+1(Mn+1)} = -\frac{l_n}{3E_n J_n} M_{n+1}$$

le rotazioni sono considerate positive se antiorarie

SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

Applicando la congruenza all'appoggio n si ha:

$$\theta_n = \theta'_n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_n = \theta_{n(p)} + \theta_{n(Mn)} \\ \theta'_n = \theta_{n(p)} + \theta_{n(Mn)} + \theta_{n(Mn+1)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_n = \frac{pl_{n-1}^3}{24EJ} + \frac{M_n l_{n-1}}{3EJ} \text{ rotazione a sinistra} \\ \vartheta'_n = -\frac{pl_n^3}{24EJ} - \frac{M_n l_n}{3EJ} - \frac{M_{n+1} l_n}{6EJ} \text{ rotazione a destra} \end{array} \right.$$

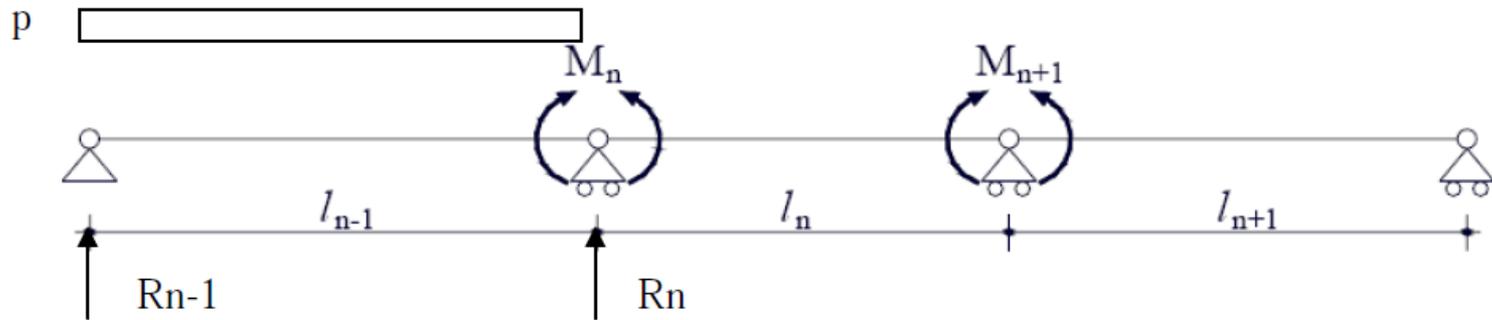
Eguagliando i due termini

$$\frac{pl_{n-1}^3}{24EJ} + \frac{pl_n^3}{24EJ} = -\frac{M_n l_{n-1}}{3EJ} - \frac{M_{n+1} l_n}{6EJ} - \frac{M_n l_n}{3EJ}$$

Prima equazione
di congruenza

SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

In maniera analoga si scrive l'equazione di congruenza per l'appoggio successivo ($n+1$) e dunque risolvere il sistema di equazioni nelle due incognite M_n e M_{n+1}



Le **reazioni vincolari** e le **caratteristiche della sollecitazione** in tutte le campate si ricavano facendo riferimento agli schemi isostatici su cui agiscono il carico distribuito ed i momenti appena calcolati.

SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

Imponendo l'equilibrio del tratto l_{n-1} si ha

$$R_{n-1} + R_n - p \cdot l_{n-1} = 0 \quad \text{traslazione verticale}$$

$$-R_{n-1} \cdot l_{n-1} + M_n + p \cdot l_{n-1} / 2 = 0 \quad \text{rotazione attorno all'appoggio } n$$

